

目 录

第一章 捷联式惯性导航的基本概念	(1)
§ 1—1 惯性导航的基本原理.....	(1)
§ 1—2 飞行器位置、姿态和航向的确定.....	(3)
§ 1—3 捷联式惯导和平台式惯导的主要区别.....	(7)
§ 1—4 捷联式惯导的发展.....	(10)
第二章 捷联惯性仪表及其误差补偿	(11)
§ 2—1 单自由度浮子陀螺仪的模型及误差补偿.....	(12)
§ 2—2 挠性陀螺仪的模型及误差补偿.....	(22)
§ 2—3 激光陀螺仪的模型及误差补偿.....	(33)
§ 2—4 加速度表的模型及误差补偿.....	(36)
第三章 捷联式惯导的姿态计算	(47)
§ 3—1 捷联式惯导算法概述.....	(47)
§ 3—2 姿态矩阵的计算.....	(48)
§ 3—3 姿态矩阵计算的机上执行算法.....	(70)
§ 3—4 姿态航向信息和角速度信息的提取.....	(84)
第四章 捷联式惯导系统的程序编排	(88)
§ 4—1 用惯性坐标系的捷联式惯导系统.....	(88)
§ 4—2 用地理坐标系的捷联式惯导系统.....	(92)
§ 4—3 用游动方位坐标系的捷联式惯导系统.....	(98)
§ 4—4 用静电陀螺的捷联式惯导系统.....	(106)
第五章 捷联式惯导系统的误差分析	(108)
§ 5—1 加速度表和陀螺仪的安装误差和标度误差.....	(108)
§ 5—2 计算误差.....	(112)
§ 5—3 基本误差特性.....	(123)
§ 5—4 随机误差源引起的系统误差.....	(136)
第六章 方向余弦矩阵的正交化和四元数的规范化	(141)
§ 6—1 方向余弦矩阵的最优正交化.....	(141)
§ 6—2 变换四元数的规范化.....	(151)

第七章 捷联式惯导系统的初始对准	(153)
§ 7—1 粗对准原理.....	(153)
§ 7—2 精对准原理.....	(159)
§ 7—3 卡尔曼滤波在初始对准中的应用.....	(170)
第八章 捷联式惯性仪表配置中的余度技术	(182)
§ 8—1 余度惯性仪表的测量方程式.....	(182)
§ 8—2 余度惯性仪表配置的评价.....	(191)
§ 8—3 余度惯性仪表的性能管理.....	(205)
§ 8—4 故障检测与识别系统设计中的—些参数选择问题.....	(218)
附录一 坐标变换的符号法	(221)
附录二 四元数理论	(225)
附录三 地球形状和重力场	(232)

前 言

捷联式惯性导航系统是随着计算技术的发展而出现的一种新型的惯性导航系统。它省掉了机电式的导航平台，把惯性仪表直接安装在飞行器上，导航平台的功能完全由计算机来完成。大容量、高速度微型机载计算机的出现，为捷联式惯性导航系统的应用创造了条件。六十年代就已成功的应用在航天飞行器上，七十年代开始应用在飞机上。

捷联式惯导系统由于去掉了机电导航平台，所以体积、重量和成本都比平台式惯导系统大为降低，而可靠性则大为提高，维护使用上也带来很多方便。随着计算机的发展和惯性仪表误差补偿技术的应用，使捷联式惯性导航系统在导航精度上完全可以达到平台式惯导系统的精度。

捷联式惯导系统虽然在工作原理上和平台式惯导系统基本相同，但是在具体实现上，有许多特殊的技术问题，目前还没有一本比较系统的介绍捷联式惯性导航系统原理的书籍，本书在这方面是一个尝试。

本书是根据北京航空学院，西北工业大学和南京航空学院三院校“航空陀螺与惯性导航”专业共同审订的“捷联式惯性导航系统原理”课程大纲编写的。全书共分八章，重点是阐述捷联式惯性导航系统的基本理论和分析综合方法，为从事捷联式惯导系统的设计研究工作打下必要的基础。在编写过程中注意了内容的系统性和完整性。

本书第七、八两章由西北工业大学郑谔编写，其余六章和附录由南京航空学院袁信编写，全书由袁信主编。本书初稿完成后，由北京航空学院崔中兴、王王林两同志进行了认真的审阅，提出了许多宝贵的意见。本书的大部份插图由吕兵同志绘制。编者对为本书出版付出了辛勤劳动的所有同志表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中的缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

编 者

第一章 捷联式惯性导航的基本概念

§ 1—1 惯性导航的基本原理

一、导航的基本概念

“导航”就是正确的引导航行体沿着予定的航线在规定的时间内到达目的地。为了完成这个任务，需要随时知道航行体的瞬时地理位置、航行速度、航行体的姿态航向等参数。这些参数，通常称作导航参数。对有人驾驶的航行体，这些导航参数可由领航员通过观察仪表和计算得到。但是，随着速度和航程的不断增大，对导航的要求越来越高。为了减轻和代替领航员的工作，就出现了各种导航系统，可以自动的提供需要的各种导航参数。在舰船、飞机、导弹、宇宙飞行器等各种航行体上，导航系统已作为保证航行任务完成所不可缺少的重要装备。而导航原理、导航方法、和导航技术的研究已发展成为一门独立的学科。

导航系统只提供各种导航参数，而不直接参与对航行体航行的控制，因此它是一个开环系统，在一定意义上，也可以说导航系统是一个信息处理系统，即把导航仪表所测量的航行信息处理成需要的各种导航参数。如果把导航系统和自动驾驶系统组合在一起成为一个闭环系统，即把导航系统提供的导航信息转换成对航行体航行的控制信息送给自动驾驶系统，通过自动驾驶系统自动的控制航行体的航行，则这样的闭环系统叫作制导系统或航行自动控制系统（见图1—1）。习惯上，对无人驾驶的飞行器如导弹、宇宙飞行器等，这种组合系统叫作制导系统，而对飞机来说，这种组合系统叫作飞行自动控制系统。飞行自动控制系统可以对飞机从起飞到着陆的飞行全过程进行自动控制。

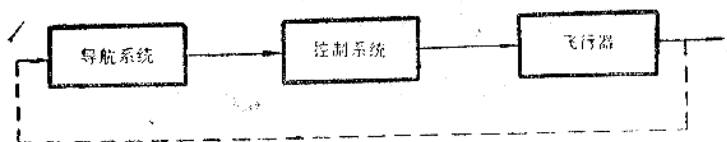


图1—1 航行自动控制系统

随着导航和控制技术的发展，飞行自动控制的作用已不仅限于减轻和代替飞行员的工作，而且已成为保证和提高飞行器性能的重要手段。对导弹来说，命中精度的80%取决于制导系统，而命中精度提高一倍，相当于威力扩大八倍。对飞机来说，自动控制技术(ACT)的出现，使控制技术进入了对飞行器结构和气动布置的控制，从而可以大大的提高飞机性能。因此，导航和控制技术的发展已成为现代航空的主要标志。

二、惯性导航的工作原理

惯性导航是一种自主式的导航方法。它完全依靠机载设备自主的完成导航任务，和外界不发生任何光、电联系。因此，隐蔽性好，工作不受气象条件的限制。这一独特的优点，对作

为军事目的而应用的各种飞行器特别重要。所以近二十年来，惯性导航在导弹、舰船、飞机、宇宙航行器上都得到了广泛的应用，在导航技术中占有突出的地位。

惯性导航的基本工作原理是以牛顿力学定律为基础的，在飞行器内用导航加速度表测量飞行器运动的加速度，通过积分运算得到飞行器的速度和位置信息。以简单的平面导航为例（见图1—2）说明其工作原理。取 oxy 坐标系为定位坐标系，飞行器的瞬时位置用 x 、 y 两

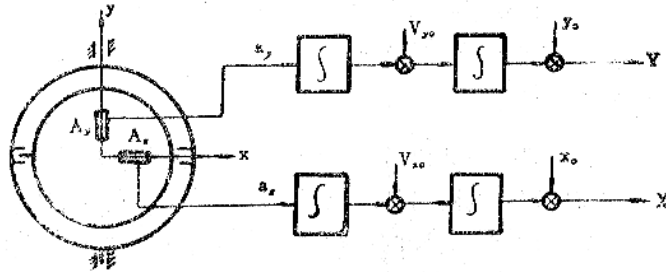


图1—2 惯性导航基本原理

个坐标值来表示。如果在飞行器内用一个导航平台把两个导航加速度计的测量轴分别稳定在 x 和 y 轴向，则加速度计分别测量飞行器沿 x 轴和 y 轴的运动加速度 a_x 和 a_y ，飞行器的飞行速度 v_x 和 v_y 、飞行器的瞬时位置 x 和 y 可分别按下式计算求得：

$$v_x = v_{x_0} + \int_0^t a_x dt$$

$$v_y = v_{y_0} + \int_0^t a_y dt$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x dt$$

$$y = y_0 + \int_0^t v_y dt$$

在实际的惯性导航系统中，飞行器的位置一般都用地理经纬度 λ 和 φ 来表示，如果 x 轴指北， y 轴指东，则用经纬度表示的飞行器位置为

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^t \frac{v_x}{R} dt$$

$$\lambda = \lambda_0 + \int_0^t \frac{v_y}{R \cos \varphi} dt$$

(1—1)

式中 R ——地球半径。

惯性导航的基本原理是很简单的，早在三百年前就提出来了。但是，差不多经过三个世纪，才出现了实际应用的惯导系统，主要原因是在具体实现上存在着许多技术难题，如导航加速度计测量范围为 $10^{-6}g \sim 10^{-9}g$ ，分辨率要 $10^{-6}g$ ，陀螺漂移要在 0.01 度/小时 ~ 0.001 度/小时，导航平台的水平精度要在 $10 \sim 20$ 角秒。因此，没有高精度的惯性仪表和高性能的控制系统和计算机，惯性导航是无法实现的。所有这些问题，到目前为止，仍然是进一步发展惯导技术的主要关键。

三、导航中常用的坐标系

导航中常用的坐标系主要有以下几种：

地心惯性坐标系(i 系 x_i, y_i, z_i 轴) 原点在地球中心, z_i 轴沿地球自转方向, x_i, y_i 在赤道平面内, 指向恒星方向, x_i, y_i, z_i 构成右手坐标系。三个坐标轴指向惯性空间固定不动。这个坐标系是惯性仪表测量的参考基准。

地球坐标系(e 系 x_e, y_e, z_e 轴)

原点在地球中心, z_e 轴和地球自转轴重合, x_e 轴在赤道平面内指向格林威治子午线, y_e 在赤道平面内, x_e, y_e, z_e 构成右手坐标系。地球坐标系(e)和地球固联, 地球坐标系相对惯性坐标系的运动就是地球自转角速度 ω_i^e 。

地理坐标系(n 系 NED轴)

原点在飞行器重心, N 轴指北, E 轴指东, D 轴和重力 g 一致(见图 1—3)。这个坐

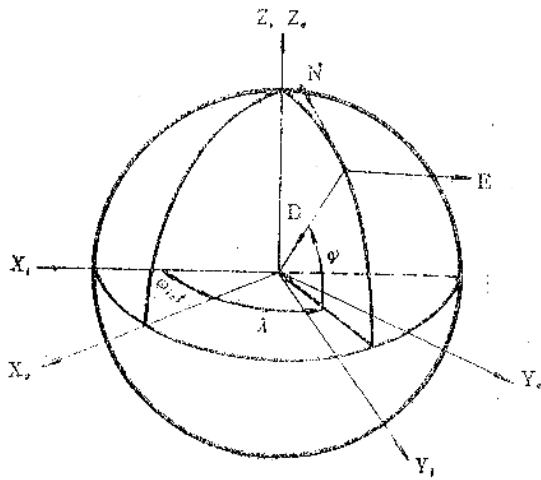


图1—3 坐标系

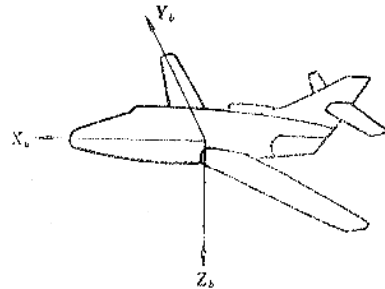


图1—4 机体坐标系

标系也可以叫作北东地地理坐标系。地理坐标系的坐标轴有三种不同的取法, 即北东地, 东北天, 或北西天。本书采用北东地坐标系。

地理坐标系相对地球坐标系的方位关系就是飞行器的地理位置(经度 λ 和纬度 φ)

机体坐标系(b 系 x_b, y_b, z_b 轴)

机体坐标系(b)和飞行器固联, 坐标原点在飞行器的重心, x_b 沿飞行器的纵轴方向, y_b 和飞行器的横轴一致, z_b 沿飞行器竖轴向下, x_b, y_b, z_b 构成右手坐标系(见图 1—4)。机体坐标系相对地理坐标系的方位为飞行器的姿态和航向。

§ 1—2 飞行器位置、姿态和航向的确定

导航需要的参数有很多, 如飞行器的瞬时地理位置、地速、飞行器的姿态和航向、偏流角、已飞距离、待飞距离、航迹角等, 在这些导航参数中, 最基本是飞行器的瞬时地理位置和飞行器的姿态航向信息。

飞行器的瞬时地理位置, 当用经纬度表示时, 实际上就是地理坐标系(n)和地球坐标系

(e) 之间的方位关系。参看图 1—5, 地球坐标系(e)如绕 z_e 轴转动 “ λ ” 角, 则得 $x'_e y'_e z'_e$ 坐标系, $x'_e y'_e z'_e$ 和 $x_e y_e z_e$ 之间的变换关系为:

$$\begin{bmatrix} x'_e \\ y'_e \\ z'_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix}$$

把 $x'_e y'_e z'_e$ 绕 $-y'_e$ 轴转动 $90^\circ + \varphi$ 角, 则得到地理坐标系 NED , NED 和 $x'_e y'_e z'_e$ 之间的变换关系为:

$$\begin{bmatrix} N \\ E \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_e \\ y'_e \\ z'_e \end{bmatrix}$$

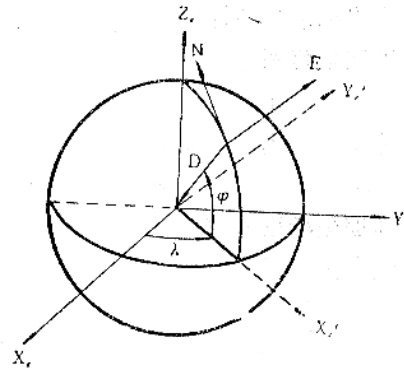


图1—5 地理坐标系和地球坐标系方位关系

地理坐标系 NED 和地球坐标系 $x_e y_e z_e$ 之间的变换关系为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N \\ E \\ D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\cos\varphi\cos\lambda & -\cos\varphi\sin\lambda & -\sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-2)$$

我们用 C_e^g 表示这个变换矩阵, 则:

$$\begin{aligned} C_e^g &= \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\cos\varphi\cos\lambda & -\cos\varphi\sin\lambda & -\sin\varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-3)$$

式中 C_e^g ——表示从地球坐标系到地理坐标系的变换矩阵。

c_{ij} ——变换矩阵的元素 ($i=1,2,3 \quad j=1,2,3$)

如果在飞行器飞行过程中, 随时能得到这个变换矩阵的各个元素, 那么可以根据 C_e^g 的元素值, 通过计算得到飞行器的位置。

$$\varphi = -\sin^{-1}(c_{33})$$

$$\lambda_{\pm} = \text{tg}^{-1}\left(\frac{c_{32}}{c_{31}}\right)$$

(1-4)

可见，确定飞行器的地理位置，实质上就是确定地理坐标系 NED 和地球坐标系 $x_e y_e z_e$ 之间的方位关系。由于飞行器的地理位置可以从 C^e 的元素中计算得到，也就是说 C^e 的元素 c_{ij} 是飞行器地理位置的函数，所以，变换矩阵 C^e 有时也叫作位置矩阵。惯性导航系统，就是在飞行过程中用计算机实时的计算 C^e 的各个元素，然后按 (1-4) 式提取飞行器的位置信息。如果导航坐标系采用地理坐标系时，则可以比较简单的采用速度信息积分运算得到 φ 和 λ (见公式 1-1)。如果导航坐标系采用其他水平坐标系，如自由方位水平坐标系或游移方位水平坐标系，则导航计算就要计算位置矩阵，再根据位置矩阵的元素和飞行器地理位置的关系提取位置信息。

飞行器的姿态和航向实际上就是机体坐标系 $x_b y_b z_b$ 和地理坐标系 NED 之间的方位关

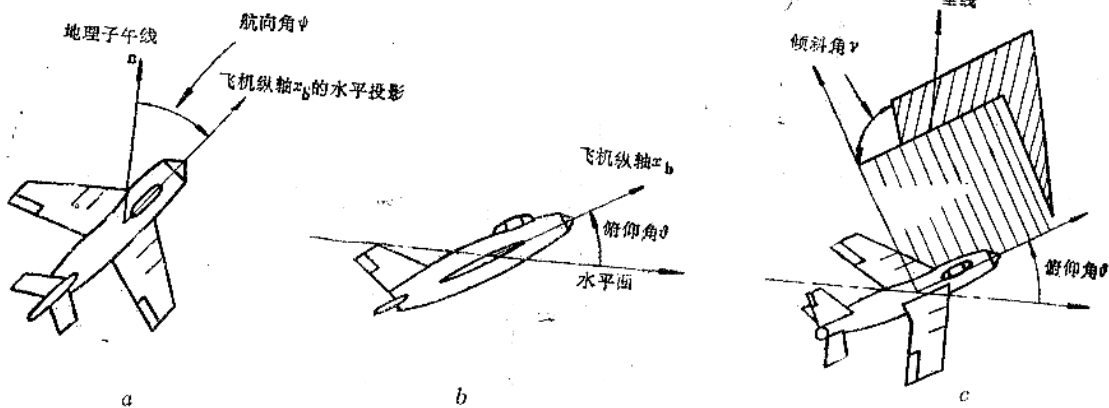


图1-6 飞行器的航向角、俯仰角和倾斜角

系。当飞行器绕垂线 D 转动时，飞行器纵轴 x_b 在水平面上的投影与地理子午线 N 之间的夹角叫作飞行器的航向角，我们用 ψ 表示 (见图 1-6 (a))。航向角的数值是以地理北向为起点顺时针方向计算的。例如飞行器向东飞行时航向角为 90° ，向西飞行时航向角为 270° 。航向角的定义域为 $0-360^\circ$ 。当飞行器绕横向水平轴转动时，则飞行器纵轴和纵向水平轴之间的夹角叫作飞行器的俯仰角，我们用 θ 表示 (见图 1-6b)。俯仰角从纵向水平轴算起，向上为正，向下为负，定义域为 $0-\pm 90^\circ$ 。飞行器纵向对称平面 ($x_b z_b$ 组成的平面) 与纵向铅垂平面 (x_b 和 D 组成的平面) 之间的夹角叫作飞行器的倾斜角，

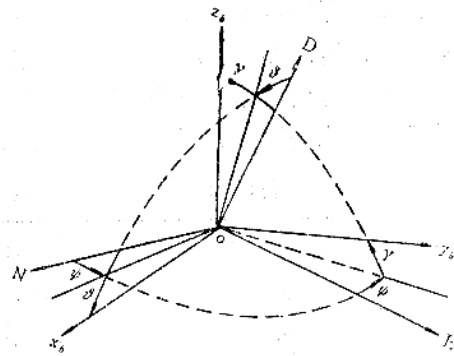


图1-7 机体坐标系和地理坐标系之间方位关系

我们用 γ 表示 (见图 1-6c)。倾斜角实际上就是飞行器绕纵轴 x_b 的转角。从铅垂平面算起，右倾为正，左倾为负，定义域为 $0-\pm 180^\circ$ 。按照姿态角和航向角的上述定义，它们就是机体坐标系 $x_b y_b z_b$ 和地理坐标系 NED 之间的方位关系 (见图 1-7)。

$x_b y_b z_b$ 和 NED 之间的变换关系为:

$$\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta & \sin\psi\cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\psi\sin\theta\sin\gamma & \sin\psi\sin\theta\sin\gamma & \cos\theta\sin\gamma \\ -\sin\psi\cos\gamma & +\cos\psi\cos\gamma & \\ \cos\psi\sin\theta\cos\gamma & \sin\psi\sin\theta\cos\gamma & \cos\theta\cos\gamma \\ +\sin\psi\sin\gamma & -\cos\psi\sin\gamma & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ E \\ D \end{pmatrix}$$

用 C_n^b 表示这个变换矩阵。

$$C_n^b = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta & \sin\psi\cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\psi\sin\theta\sin\gamma & \sin\psi\sin\theta\sin\gamma & \cos\theta\sin\gamma \\ -\sin\psi\cos\gamma & +\cos\psi\cos\gamma & \\ \cos\psi\sin\theta\cos\gamma & \sin\psi\sin\theta\cos\gamma & \cos\theta\cos\gamma \\ +\sin\psi\sin\gamma & -\cos\psi\sin\gamma & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (1-5)$$

显然，这个变换矩阵的元素是飞行器的姿态角和航向角的函数，如果知道了这个矩阵的元素值，则可以计算出飞行器的姿态和航向角。即：

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \text{tg}^{-1}(T_{12}/T_{11}) \\ \theta &= -\sin^{-1}(T_{13}) \\ \gamma &= \text{tg}^{-1}(T_{23}/T_{33}) \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

机体坐标系 $x_b y_b z_b$ 和地理坐标系 NED 之间的变换矩阵 C_n^b ，由于它的元素是飞行器姿态角和航向角的函数，所以有时就把这个矩阵叫作“姿态矩阵”。

在平台式惯导系统中，地理坐标系 NED 是可以由导航平台实体模拟的。因此，地理坐标系和机体坐标系之间的方位关系是直接由几何关系测量出来的。即不需要实时的计算姿态矩阵，也不需要按 (1-6) 式计算姿态角和航向角。但是，在捷联式惯导系统中，由于没有实体平台，所以必需实时的计算姿态矩阵，再从姿态矩阵的元素中提取姿态和航向信息。由于飞行器姿态变化速率较快（高性能歼击机的动态参数见表(1-1)），因此实时的计算姿态矩阵是一个比较困难的课题，是捷联式惯性导航系统主要技术问题之一。

表1-1 飞机的动态参数

角速度	低	中	高
倾斜	$\pm 100^\circ/s$	$\pm 200^\circ/s$	$\pm 500^\circ/s$
俯仰	$\pm 40^\circ/s$	$\pm 80^\circ/s$	$\pm 120^\circ/s$
偏航	$\pm 40^\circ/s$	$\pm 80^\circ/s$	$\pm 120^\circ/s$
角加速度			
倾斜	$\pm 500^\circ/s^2$	$\pm 1000^\circ/s^2$	$\pm 1500^\circ/s^2$
俯仰			
偏航			
线加速度	$\pm 5g$	$\pm 10g$	$\pm 15g$

§ 1—3 捷联式惯导和平台式惯导的主要区别

从结构上来说,捷联式惯导和平台式惯导的主要区别是前者没有实体导航平台,而后者有实体导航平台。在平台式惯导系统中,导航平台的主要功用是模拟导航坐标系,把导航加速度计的测量轴稳定在导航坐标系轴向,使其能直接测量飞行器在导航坐标系轴向的加速度,并且可以用几何的方法,从平台的框架轴上直接拾取飞行器的姿态和航向信息。而捷联式惯性导航系统则不用实体导航平台,把加速度计和陀螺直接安装在飞行器机体上,在计算机中实时的计算姿态矩阵,通过姿态矩阵把导航加速度计测量的飞行器沿机体坐标系轴向的加速度信息变换到导航坐标系,然后进行导航计算。同时从姿态矩阵的元素中提取姿态和航向信息。由此可见,在捷联式惯导中,是用计算机来完成导航平台的功用。所以有时也说捷联式惯导系统是采用“数学导航平台”。除此之外,其他导航计算则是基本相同的。

图(1—8)是平台式惯导系统的原理示意图,导航加速度计和陀螺都安装在导航平台

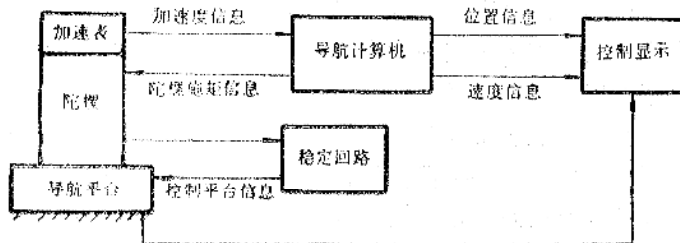


图1—8 平台式惯导系统原理

上,加速度输出的信息,送到导航计算机,导航计算机除计算飞行器位置、速度等导航信息外,还要计算对陀螺的施矩信息。陀螺在施矩信息作用下,通过平台稳定回路控制平台跟踪导航坐标系在惯性空间的角运动。而飞行器的姿态和方位信息,则从平台的框架轴上直接测量得到。

图(1—9)是捷联式惯导系统的原理示意图。导航加速度计和陀螺直接安装在飞行器上,

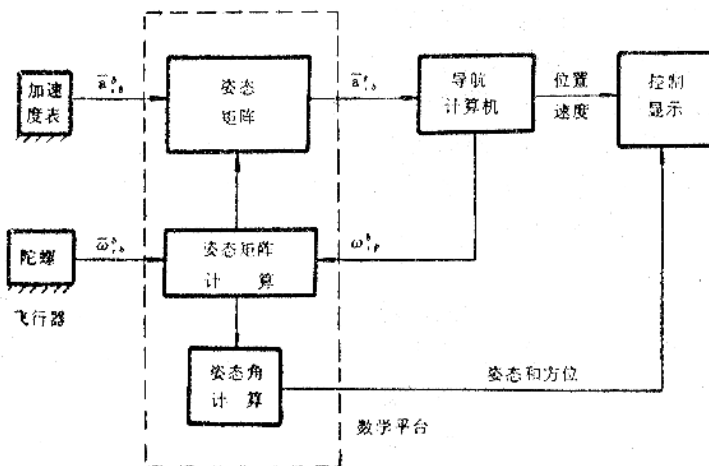


图1—9 捷联式惯导系统原理

用陀螺测量的角速度信息 $\omega_{i_b}^b$ 减去计算的导航坐标系相对惯性空间的角速度 $\hat{\omega}_{i_n}^b$, 则得到机体坐标系相对导航坐标系的角速度 $\omega_{i_b}^b$, 利用这个信息进行姿态矩阵的计算。有了姿态矩阵, 就可以把机体坐标系轴向的加速度信息变换到导航坐标系轴向, 然后进行导航计算。同时利用姿态矩阵的元素, 提取姿态和航向信息。所以, 姿态矩阵的计算、加速度信息的坐标变换、姿态航向角的计算, 这三项功能实际上就代替了导航平台的功能, 因此, 计算机的这三项功能也就是所谓的“数学平台”。而计算的导航坐标系的角速度信息 $\hat{\omega}_{i_n}^b$ 则相应于导航平台上的陀螺施矩信息。

从上述系统原理图我们可以看到, 捷联式惯导系统和平台式惯导系统相比, 具有两个明显的特点:

一、惯性仪表(加速计和陀螺)直接固定在机体上。这样作的结果给捷联式惯导系统带来的明显的优点是:

1. 惯性仪表便于安装和维护, 也便于更换。
2. 惯性仪表可以直接给出飞行器线加速度和角速度信息, 而这些信息是飞行器控制系统所需要的。在采用平台式惯导系统的飞行器上, 控制系统所需要的线加速度和角速度信息, 必需由单独的加速度传感器和角速度传感器来提供, 采用捷联式系统则这些传感可以省掉。
3. 便于采用多余的惯性仪表来实现冗余技术, 提高系统的性能和可靠性。有关冗余技术的问题, 放在第八章专门介绍。

惯性仪表直接安装在机体上也带来了新的问题, 就是使惯性仪表的工作环境恶化了。从而对惯性仪表提出了更高的要求, 要求惯性仪表在航行体的振动、冲击、温度等环境条件下精确的工作。参数和性能要有很高的稳定性。航行体的角运动直接作用在惯性仪表上, 将产生严重的动态误差。因此, 在系统中必须采取误差补偿措施。

对捷联式陀螺仪, 测量角速度的范围从 0.01 度/小时到 400 度/小时, 即动态量程高达 10^2 。这就需要陀螺仪有大力矩的力矩器, 和高性能的再平衡回路, 使陀螺仪工作在闭环状态。大力矩的力矩器、高精度的再平衡回路, 以及误差的补偿技术都是捷联式陀螺仪的主要技术问题。研制高性能的捷联式陀螺仪, 仍然是发展捷联式惯导技术的主要关键。

表 1—2 列出了航行时间为 1~10 小时、精度为 1 海里/小时的捷联式惯性系统 (INS) 与适用于中程制导的捷联姿态和航向参考系统 (AHRS), 对惯性仪表提出的典型性能要求。这些指标分别代表了技术要求的上界和下界。

表中所述速率陀螺仪带宽, 是在苛刻的振动环境下为能向系统计算机提供精确的数据所必需的。在 AHRS 应用中, 带宽一般取决于飞行器操纵品质对捷联速率信号输出的要求。仪表的最小校正间隔, 对高精度捷联系统而言, 也是一个重要的指标, 因为校正时需要将仪表从飞行器上卸下, 在转台上进行测试, 以激发可预测的仪表误差, 并分离对 g 敏感的误差和地球速率输入的响应。

二、用计算机来完成导航平台的功能。即省掉机电式的导航平台, 采用所谓“数学平台”。

数学平台就是用捷联式陀螺仪输出的飞行器角速度信息在计算机中计算姿态矩阵, 从姿态矩阵的元素中提取飞行器的姿态和航向信息。并用姿态矩阵对加速度表的输出信息进行坐标变换, 从机体坐标系变换到导航坐标系。然后进行导航计算。由于飞行器的姿态角度变化速率很快, 可高达 400 度/秒。所以, 姿态矩阵的实时计算必需要有高速度的计算机, 对计算机提出了更高的要求, 这是捷联式系统的一个明显的特点。

表1—2 对惯性仪表的典型性能要求^[3]

性能参数	性能要求	
	INS	AHRS
陀螺施矩速率范围(度/秒)	100—400	100—400
陀螺偏置(度/小时)	0.01	1.0—10.0
陀螺随机噪声(度/√小时*)	0.003	0.2
速率陀螺刻度系统误差(PPM)	5—50	100—1000
速率陀螺刻度系数的低速率不对称性(PPM)	1	100
速率陀螺带宽(赫)	30—300	30—80
速率陀螺输出脉冲的量化(角秒)	2—10	10—100
姿态陀螺读出误差(角秒)	10	200
加速度计偏置(μg)	50	1000
加速度表刻度系数误差(PPM)	200	1000
仪表安装误差(角秒)	1~5	200
仪表温升时间(分钟)	1~5	0.5~1.0
仪表最小校正间隔(年)	0.5	2

* 这个误差源主要表示激光陀螺的一种特性。其他陀螺也有随机噪声输出误差，但一般情况下，与激光陀螺相比，它们具有较窄的通带和较小的振幅功率谱密度。

数字式的导航计算机有三种类型，即数字微分分析器(DDA)、专用可编程的计算机和通用计算机。早期的导航计算机是采用微分分析器，随着数字计算机成本和尺寸的减小，以后改用专用计算机或通用计算机。用的较多的是通用微型计算机。七十年代后期，飞机捷联式惯导系统也常用微处理机来代替微计算机。随着电路集成度的提高，单板机和单片机的功能和运算速度不断提高，又可能采用微计算机来作为导航计算机。

对导航计算机的主要要求是计算精度和计算速度。保证精度的主要方法是采用足够的数据字长，通常采用12到32位，常用16位和24位。如果导航系统中采用最优滤波器，则需要32位字长。在惯性导航中计算的变量动态范围很大，所以通常采用浮点运算。导航计算机的指令系统除了通常的加、减、乘、除等算术运算之外，还需要有正弦、余弦、反正切、求平方根等计算。一般导航计算机的技术性能如表1~3所示。

表1—3 导航计算机性能^[3]

参 数	性 能
字 长	16~24位
加 法	2~3 μs
乘 法	5~10 μs
除 法	10~35 μs
存 储	1.0 μs
浮 点	是
双 精	是
指 令	加、减、乘、除、求补、进位、转移、输入—输出、寄存、移位、平方根、正弦、余弦、反正切

下面给出美国霍尼韦尔公司 (Honeywell, Inc.) 1970 年生产用于 H—478 捷联式系统的计算机主要性能参数供参考。^[9]

体 积	7.25×3.5×2 立方英寸
重 量	1.6 磅
字 长	24 位
指 令 字 长	16 位
指 令 时 间:	
加 法	2.9 μ s
乘 法	12.5 μ s
除 法	37.6 μ s(包括软件)
存 储 器 类 型	ROM RAM 磁线型
字 长	24位 24位 24位
最 小 容 量	256 64 2K
最 大 容 量	2K
循 环 时 间	0.9 μ s 0.75 μ s 1 μ s

§ 1—4 捷联式惯导的发展

早在 1956 年, 美国就有了捷联式惯导系统的专利。但当时由于缺乏适用于捷联式的惯性仪表和计算机, 所以无法实际实现, 随着电子技术的发展, 大容量、高速度微型计算机的出现, 以及以可靠性为主要考虑因素的航天技术的需要, 促使人们对捷联系统进行研究。六十年代初, 美国联合飞机公司哈密尔顿标准中心研制的 LM/ASA 捷联式系统, 首先在“阿波罗”登月舱中得到了应用, 接着霍尼韦尔公司的 H—401 型捷联式制导系统, 成功的制导了普莱姆飞行器。捷联式系统的成功, 受到了各方面的注意, 六十年代后期, 捷联系统有了很大的发展, 1966 年到 1973 年期间, 美国联合公司制造的捷联式系统, 先后装备了登月舱、三级火箭、登陆艇等。霍尼韦尔公司从 69 年开始, 为艾吉纳、范格尔德·斯考特、伯纳等宇宙飞行器提供了捷联式惯导系统。七十年代初, 美国哈密尔顿标准中心研制的捷联式系统, 开始在飞机上成功的使用。1969 年, 美国海军、空军决定为飞机和导弹研制捷联式系统, 并和一些公司签订了合同, 其中进展比较快的有洛克韦尔国际公司研制的采用静电陀螺的中等精度低成本的机载捷联式系 MICRON 系统, 霍尼韦尔公司研制的采用激光陀螺的 LINS 系统, MICRON 系统定位精度为 1 海里/小时, 速度精度 5 英尺/秒, 姿态精度 4 角分, 平均故障间隔时间 2000 小时。LINS 系统, 定位精度 1 海里/小时, 速度精度 3 英尺/秒, 姿态精度 2.5 角分, 平均故障间隔时间为 2500 小时, 两种系统性能大致一样, LINS 系统略高。

捷联式惯性导航系统由于省掉了机电式的导航平台, 所以体积、重量和成本都大大降低, 国外有人把捷联惯导系统列为低成本惯导。由于捷联式系统提供的信息全部是数字信息, 所以, 特别适用在采用数字飞行控制系统的飞行器上, 随着计算机的飞速发展, 捷联式系统的应用必将越来越广泛。

第二章 惯性仪表及误差补偿

捷联式惯性系统中应用的陀螺仪主要有四种：单自由度液浮陀螺仪、动力调谐挠性陀螺仪、静电陀螺仪和激光陀螺仪。静电陀螺仪可以直接测量载体的方位角，属于位置陀螺仪，其他三种陀螺都用来测量角速度，属于速率陀螺仪。前一章已经指出，应用在捷联式系统中的陀螺仪，有两个主要特点，一个是直接承受飞行器的动态环境，工作条件比较恶劣，另一个特点就是要有很大的施矩速度，因而要用大力矩的力矩器。捷联式陀螺仪应用上的这两个特点，都给陀螺仪带来严重的漂移误差。对捷联式加速度表，虽然没有大力矩力矩器的问题，但是，也同样承受飞行器的动态环境，存在着动态误差。惯性仪表的误差是影响惯性系统精度的主要因素。为了保证导航精度，必须减小惯性仪表的误差。而惯性仪表误差的减小单从仪表的设计和制造工艺上来解决是非常困难的，可以用计算机对仪表的误差进行补偿。大容量、高速度的导航计算机为惯性仪表的误差补偿提供了很好的条件。

要实现惯性仪表的误差补偿，必须建立仪表的数学模型。惯性仪表的数学模型就是在特定的条件下惯性仪表输出和输入之间的数学关系。数学模型的研究是发展误差补偿技术的依据。精确的数学模型是实现精确的误差补偿的前提。惯性仪表的数学模型有许多种，如在飞行器的线运动环境下惯性仪表的数学模型通常称作静态模型，因为这种模型可以在静基座上反映出来。在飞行器角运动环境下仪表输出输入的数学关系称作动态模型。考虑仪表各种随机干扰作用下的仪表数学模型则称作随机模型。建立惯性仪表数学模型的方法有两种，一种是解析法，根据仪表的工作原理和结构，用分析的方法推导出惯性仪表输出和输入的关系。用这种方法得到的数学模型物理概念清晰，所有系数都是用仪表结构系数来表示的。有明确的物理意义。但是，在推导数学模型时，不可避免的要作某些假设条件，因而这种模型总有一定程度的近似性；另一种是实验法，这是工程实践中常用的方法。设计一种实验方案能够激励全部误差，然后通过大量试验取得数据，经过数据处理确定各项误差系数。用实验的方法确定惯性仪表的数学模型是惯性仪表测试技术的重要内容。

惯性仪表的静态误差模型是飞行器沿机体坐标系轴向线运动的函数。而惯性仪表的动态误差则是飞行器绕机体坐标系轴向角运动的函数。所以，动静误差补偿量可以用捷联式陀螺仪和捷联式加速度表的输出信息在导航计算机中计算出来。惯性仪表的误差补偿原理如图 2—1 所示。图中 ω 、 A 为飞行器相对惯性空间的角速度和线加速度（比力 f ）。

ω_0 、 A_0 、 ω 、 A 分别为未经补偿的和补偿后的量。 $\delta\omega$ 和 δA 为计算的补偿量。

这一章我们介绍单自由度浮子陀螺，动力调谐挠性陀螺、激光陀螺和浮子摆式加速度表的模型及误差补偿。

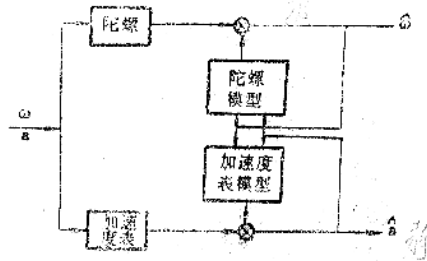


图 2—1 惯性仪表误差补偿原理

§2—1 单自由度浮子陀螺仪的模型及误差补偿

第一代捷联式单自由度浮子陀螺仪是平台式系统中应用的单自由度浮子积分陀螺的改进,主要是加大力矩器的输出力矩,后来又专为捷联系统研制了单自由度浮子陀螺,捷联式单自由度浮子陀螺仪工作在闭环状态用来测量角速率。其构造示意图见图2—2。陀螺马达装在一个密封的圆筒内,称作浮子。它用精密轴承支承在仪表壳体上。陀螺转子相对仪表壳体只能绕一个轴进动。当陀螺仪没有角速度输入时,转子的自旋轴称作自旋基准轴(s)。支承浮子的轴称作输出轴(o),与输出轴和自旋基准轴垂直构成右手坐标系的那根轴称为输入轴(i)。单自由度浮子陀螺仪的精度,取决于输出轴上干扰力矩的大小,为了减小输出轴上的摩擦力矩,采用了液浮技术。

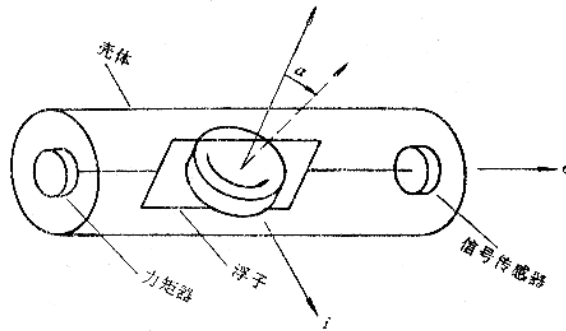


图2—2 单自由度浮子陀螺仪

当飞行器绕仪表的输入轴有转动角速度时,由于支承推力矩的作用,使陀螺仪产生绕输出轴的进动。信号传感器测量这个进动角并输出和转角成比例的电信号。这个信号经过电子线路放大处理送给力矩器,力矩器产生一个和输入电流成比例的电磁力矩作用在浮子的输出轴上,这个电磁力矩使陀螺产生一个和输入角速度相同的进动角速度。此时力矩器的电流和输入角速度成比例。力矩电流的积分则是陀螺仪输入角速度积分的度量。信号器、电子线路和力矩器构成的回路称作再平衡回路。如果加给力矩器的电流是连续的模拟量,则再平衡回路称作模拟再平衡回路。如果加给力矩器的电流是一些脉冲,则这样的再平衡回路称作脉冲再平衡回路。在捷联式单自由度浮子陀螺仪中,较多的是采用脉冲再平衡回路。输出的每一个电脉冲代表一个角增量,即输入角速度的积分。

一、单自由度浮子陀螺动力学

在推导单自由度浮子陀螺仪的动力学方程时,我们作如下的假设:

- (1) 浮子相对陀螺壳体的安装是理想的,陀螺转子相对陀螺壳体只能绕输出轴转动。
- (2) 浮子组件的惯性积为零。
- (3) 陀螺转子框架是理想的刚体。
- (4) 陀螺转子的自转角速度是常值。

在上述假设条件下,对浮子组件应用动量矩定理,则有:

$$\mathbf{M}_f = \left[\frac{d}{dt} \mathbf{H}_f \right]_i \quad (2-1)$$

式中 \mathbf{M}_f ——绕质量中心作用在浮子组件上的外力矩。

\mathbf{H}_f ——浮子组件绕质量中心的角动量。

$\left(\frac{d}{dt} \mathbf{H}_f\right)$ —— \mathbf{H}_f 相对惯性空间的时间导数。

利用角动量矢量的绝对导数与相对导数的关系，取 \mathbf{H}_f 相对浮子的导数时，则 (2-1) 式写作：

$$\mathbf{M}_f = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{H}_f\right)_f + \boldsymbol{\omega}_{if} \times \mathbf{H}_f$$

把上式表示在浮子坐标系，则为

$$\mathbf{M}_f^f = \dot{\mathbf{H}}_f^f + \boldsymbol{\omega}_{if}^f \mathbf{H}_f^f \quad (2-2)$$

式中

$$\boldsymbol{\omega}_{if}^f = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

把浮子相对惯性空间的角速度 $\boldsymbol{\omega}_{if}^f$ 用浮子相对壳体的角速度 $\boldsymbol{\omega}_{if}^c$ 和壳体相对惯性空间的角速度 $\boldsymbol{\omega}_{ic}^c$ 相加来表示，即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{if}^f &= \boldsymbol{\omega}_{if}^c + \boldsymbol{\omega}_{ic}^c \\ &= \mathbf{C}_c^f (\boldsymbol{\omega}_{ic}^c + \boldsymbol{\omega}_{ic}^c) \end{aligned} \quad (2-3)$$

式中

$$\boldsymbol{\omega}_{ic}^c = [\omega_i, \omega_o, \omega_s]^T$$

$\omega_i, \omega_o, \omega_s$ ——为壳体相对惯性空间的角速度在 i, o, s 轴向的分量。

按照假设，浮子相对壳体只能绕输出轴转动，故，

$$\boldsymbol{\omega}_{ic}^c = [0 \quad \dot{\alpha}_o \quad 0]^T \quad (2-4)$$

当浮子的输出角为零时，浮子组件的主轴和壳体坐标系 (i, o, s) 是重合的，故壳体坐标系和浮子坐标系之间的变换矩阵为

$$\mathbf{C}_c^f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha_o \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_o & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

把 (2-3) 式展开得：

$$\boldsymbol{\omega}_{if}^f = \begin{bmatrix} \omega_i - \alpha_o \omega_s \\ \omega_o + \dot{\alpha}_o \\ \omega_s + \alpha_o \omega_i \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

浮子组件的总角动量等于浮子组件的角动量加上转子自转的角动量。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_f^f &= \mathbf{H}_c^f + \mathbf{H}_k^f \\ &= I_o \boldsymbol{\omega}_{if}^f + \mathbf{H}_k^f \end{aligned}$$

考虑惯性积为零，则上式展开为

$$\begin{bmatrix} H_s \\ H_o \\ H_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & I_o & 0 \\ 0 & 0 & I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_s - \alpha_o \omega_s \\ \omega_s + \dot{\alpha}_o \\ \omega_s + \alpha_o \omega_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

式中 H ——转子自转的角动量。

I_s 、 I_o 、 I_s ——浮子组件的主惯性矩。

把方程 (2-7)、(2-6) 代入 (2-2) 中并展开, 则绕输出轴的动力学方程为:

$$\begin{aligned} M_o = I_o \ddot{\alpha}_o - H\omega_s + (I_s - I_i)\omega_s\omega_s + \alpha_o(I_s - I_s)(\omega_s^2 - \omega_s^2) \\ + \alpha_o H\omega_s + I_o \dot{\alpha}_o \end{aligned} \quad (2-8)$$

绕输出轴的外加力矩为:

- (1) 力矩器的电磁力矩 M_{ts}
- (2) 粘性阻尼力矩 $c_o \dot{\alpha}_o$
- (3) 作用在陀螺上的干扰力矩 M_d

$$\text{即} \quad M_o = M_{ts} - c_o \dot{\alpha}_o + M_d \quad (2-9)$$

把 (2-9) 代入 (2-8) 中, 则得:

$$\begin{aligned} I_o \ddot{\alpha}_o + c_o \dot{\alpha}_o &= H\omega_s + M_{ts} && \text{(理想陀螺方程)} \\ &+ (I_s - I_i)\omega_s && \text{(非等弹性力矩)} \\ &+ \alpha_o(I_s - I_i)(\omega_s^2 - \omega_s^2) && \text{(非等弹性交连)} \quad (2-10) \\ &- \alpha_o H\omega_s && \text{(交叉耦合力矩)} \\ &- I_o \dot{\alpha}_o && \text{(输出轴角加速度)} \\ &+ M_d && \text{(干扰力矩)} \end{aligned}$$

仪表的再平衡回路是按理想方程来设计,

$$\text{即} \quad I_o \ddot{\alpha}_o + c_o \dot{\alpha}_o = H\omega_s - M_{ts}$$

其他的项都是误差项。是需要加以补偿的, 除 M_d 之外的其他误差项, 都和壳体的角运动有关。通常把这些由壳体的角运动所产生的误差叫作仪表的动态误差。对捷联式陀螺而言, 由于直接承受飞行器的角运动, 所以动态误差是严重的。

一个典型的脉冲施矩再平衡回路如图2-3所示。

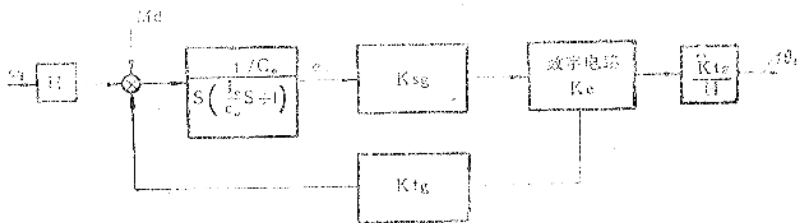


图2-3 脉冲施矩再平衡回路

表示 $K = K_{sg} K_c K_{tg}$

则 $M_{tg} = -K \alpha_o$

代入 (2-10) 式得到陀螺的动力学方程为:

$$I_o \ddot{\alpha}_o + C_o \dot{\alpha}_o + K \alpha_o = H \omega_s + M_d' \quad (2-11)$$

式中

$$\begin{aligned} M_d' &= M_d + (I_s - I_i) \omega_i \omega_s - I_o \dot{\omega}_o \\ &\quad - H \omega_s \alpha_o + \alpha_o (I_s - I_i) (\omega_i^2 - \omega_s^2) \end{aligned}$$

考虑到力矩器的标度系数 S_g 和量化器, 再平衡回路的方块图也可以画成图2-4。图中

$$S_g = 1 + S_{g0} + S_{g1} \left(-\frac{K}{H} \alpha_o \right)$$

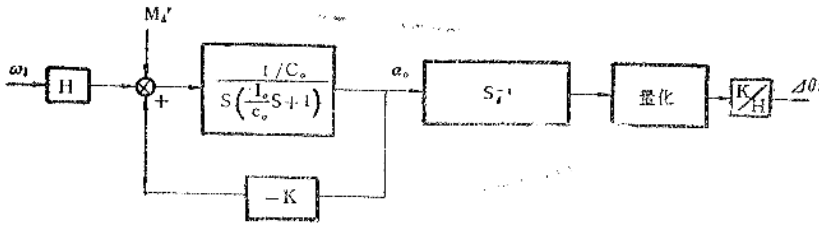


图2-4 再平衡回路方块结构图

二、单自由度浮子陀螺的模型方程

单自由度浮子陀螺的模型方程由以下几个部分组成, 其方块结构如图 2-5 所示。

1. 机体坐标系到仪表壳体坐标系的变换

如果陀螺安装在飞行器上存有安装误差, 则壳体坐标系 $cios$ 相对机体坐标系 $bx_b y_b z_b$ 存在着失协角。两个坐标系之间的变换矩阵用 C_b^c 表示。此时, 沿机体坐标系轴向的飞行器的加速度 (比力) f^b , 角速度 ω^b 和角加速度 $\dot{\omega}^b$ 需要变换到陀螺壳体坐标系, 即:

$$\left. \begin{aligned} f^c &= C_b^c f^b \\ \omega^c &= C_b^c \omega^b \\ \dot{\omega}^c &= C_b^c \dot{\omega}^b \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

(2-12) 式表示陀螺沿壳体坐标系轴向承受的飞行器的动态环境。

2. 飞行器角运动引起的误差

由飞行器的角运动引起的漂移叫作动态漂移。由 (2-10) 式可以看出, 由飞行器的角运动引起的漂移误差为:

$$\begin{aligned} \epsilon_D &= \frac{1}{H} [(I_s - I_i) \omega_i \omega_s + \alpha_o (I_s - I_i) (\omega_i^2 - \omega_s^2) \\ &\quad - \alpha_o H \omega_s - I_o \dot{\omega}_o] \end{aligned} \quad (2-13)$$

式中的 α_o 为浮子绕输出轴的转角。它可以从信号传感器的输出中求出，也可以考虑在再平衡回路中，力矩器产生的力矩主要是平衡由输入角速度产生的陀螺力矩，即

$$K\alpha_o \approx H\omega_i$$

故

$$\alpha_o \approx \frac{H}{K}\omega_i$$

代入 (2-13) 式可得

$$\begin{aligned} \varepsilon_D = \frac{1}{H} [(I_s - I_i)\omega_i\omega_s + \frac{H}{K}(I_s - I_i)(\omega_i^2 - \omega_s^2)\omega_i] \\ - \frac{H^2}{K}\omega_i\omega_s - I_o\dot{\omega}_o \end{aligned} \quad (2-14)$$

3. 飞行器线运动引起的误差

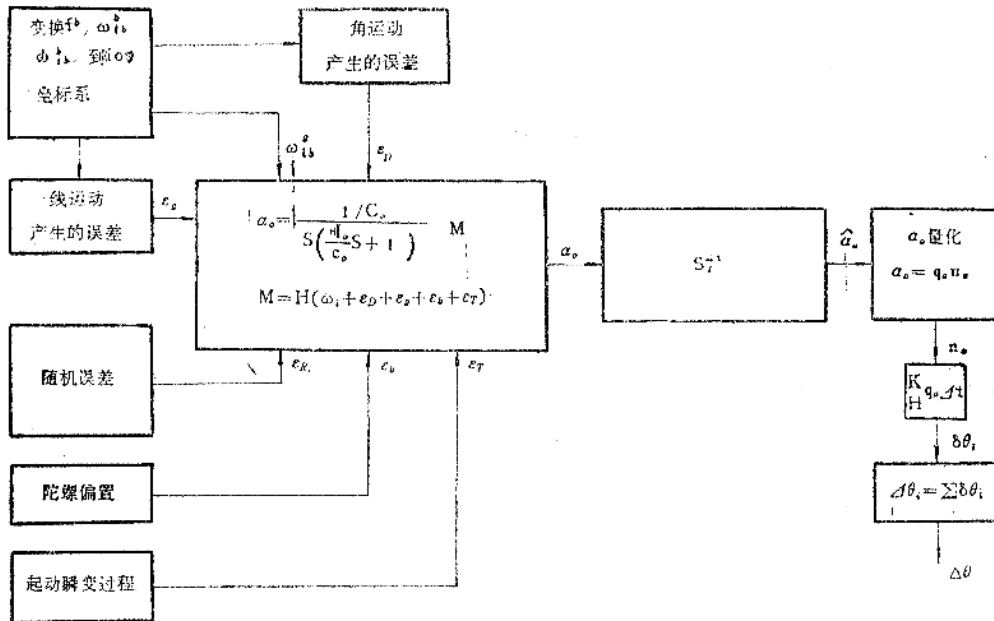


图2-5 单自由度浮子陀螺数学模型

这类误差可以在静基座上借助地球重力加速度 g 激发出来进行测定，所以叫作静态误差。静态漂移对捷联式陀螺和平台式陀螺都同样存在。

静态误差包括以下几个部分：

(1). 质量不平衡力矩

质量不平衡力矩是浮子的质心对输出轴的位移引起的。绕输出轴的分量可表示为

$$M_{e1} = m(\mathbf{f}^T \times \delta) \cdot \bar{O} \quad (2-15)$$

式中 m 是浮子组件的质量， δ 是浮子组件的质心相对输出轴的偏移量， \bar{O} 是输出轴向的单位矢量。考虑

$$\mathbf{f}^T \approx \mathbf{f}^c$$

则 (2-15) 式展开得

$$M_{e1} = m(\delta_i f_s - \delta_s f_i) \quad (2-16)$$

(2-16) 式为质量不平衡引起的绕陀螺输出轴的干扰力矩。

(2) 热对流误差力矩

由于温度梯度和沿输出轴的加速度场引起的液体热对流，绕输出轴产生干扰力矩，这个干扰力矩可以写成如下的形式

$$M_{e2} = m\delta_o f_o$$

(3) 非等弹性误差力矩

由于浮子组件的非等弹性，在比力的作用下产生附加的质心偏移，其位移量可表示为：

$$\delta = m[\mathbf{K}]\mathbf{f} \quad (2-17)$$

式中

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{io} & K_{is} \\ K_{oi} & K_{oo} & K_{os} \\ K_{si} & K_{so} & K_{ss} \end{bmatrix}$$

是浮子的柔性系数矩阵、非对角线项，为浮子组件的交叉柔性系数。

由非等弹性产生的误差力矩为：

$$\begin{aligned} M_{e3} &= m(\mathbf{f}^t \times \delta) \cdot \bar{O} \\ &= m(\mathbf{f}^c \times \delta) \cdot \bar{O} \\ &= m^2 [K_{io} f_o f_s + K_{is} f_i^2 + (K_{ii} - K_{ss}) f_i f_s \\ &\quad - K_{so} f_o f_i - K_{si} f_i^2] \end{aligned} \quad (2-18)$$

总的静态误差力矩为：

$$\begin{aligned} M_e &= M_{e1} + M_{e2} + M_{e3} \\ &= m(\delta_i f_s - \delta_s f_i) + m\delta_o f_o + m^2 [K_{io} f_o f_s + K_{is} f_i^2 \\ &\quad + (K_{ii} - K_{ss}) f_i f_s - K_{so} f_o f_i - K_{si} f_i^2] \end{aligned} \quad (2-19)$$

由静态误差力矩产生的陀螺静态漂移误差为

$$\begin{aligned} \varepsilon_o &= \frac{M_e}{H} \\ &= \frac{m}{H} (\delta_i f_s - \delta_s f_i) + \frac{m}{H} \delta_o f_o + \frac{m^2}{H} [K_{io} f_o f_s \\ &\quad + K_{is} f_i^2 + (K_{ii} - K_{ss}) f_i f_s - K_{so} f_o f_i - K_{si} f_i^2] \end{aligned}$$

表示

$$\begin{aligned} D_i &= -\frac{m\delta_s}{H} & D_o &= \frac{m}{H} \delta_o \\ D_s &= \frac{m\delta_i}{H} & D_{ii} &= \frac{m^2}{H} K_{ii} \end{aligned}$$

$$D_{i_0} = -\frac{m^2}{H} K_{s_0} \quad D_{i_1} = \frac{m^2}{H} (K_{i_1} - K_{s_1})$$

$$D_{o_0} = -\frac{m^2}{H} K_{i_0} \quad D_{s_0} = \frac{m^2}{H} K_{i_0}$$

则由加速度（比力）产生的陀螺仪漂移为

$$\begin{aligned} \varepsilon_a = & D_{i_1} f_{i_1} + D_{o_1} f_{o_1} + D_{i_2} f_{i_2} + D_{o_2} f_{o_2} + D_{i_3} f_{i_3} + D_{o_3} f_{o_3} \\ & + D_{i_4} f_{i_4} + D_{o_4} f_{o_4} \end{aligned} \quad (2-20)$$

(4) 陀螺偏置 ε_B

陀螺偏置是指和飞行器的角运动和线运动都无关的常值漂移，这个常值漂移是由作用在浮子上的常值干扰力矩产生的。这个常值漂移在系统再次启动时也有所变化。我们用 ε_B 表示这个陀螺偏置。

(5) 随机漂移 ε_R

陀螺仪的随机漂移数学模型我们在第五章讨论，这里我们只用 ε_R 表示陀螺仪的随机漂移。

(6) 启动时的瞬态过程

仪表启动时，由于仪表加温产生液体的对流扰动，形成严重的误差力矩，当达到平衡后，这种误差力矩消失。所以，启动时瞬变过程产生的漂移，可以简单的用一个指数函数来表示。

$$\varepsilon_T = \varepsilon_T(0) e^{-t/\tau_T} \quad (2-21)$$

式中 $\varepsilon_T(0)$ ——初始时刻的幅值。

τ_T ——时间常数。

(7) 力矩器的标度系数

力矩器的标度系数通常考虑由线性项加上比例于输入角速度的项构成，即

$$\begin{aligned} S_g &= [1 + S_{g0} + S_{g1}(\omega_i)] \\ &= \{1 + S_{g0} + S_{g1} \left[\frac{K}{H} \alpha_o \right]\} \end{aligned}$$

对正的和负的角速度输入，标度系数可以有不同的值，故标度系数方程应写作。

$$\begin{aligned} S_{g(+)} &= [1 + S_{g0(+)} + S_{g1(+)} \left(\frac{K}{H} \alpha_o \right)] \quad \alpha_o \geq 0 \\ S_{g(-)} &= [1 + S_{g0(-)} + S_{g1(-)} \left(\frac{K}{H} \alpha_o \right)] \quad \alpha_o < 0 \end{aligned} \quad (2-22)$$

式中 $S_{g0(+)}、S_{g0(-)}$ ——正的和负的线性标度系数。

$S_{g1(+)}、S_{g1(-)}$ ——正和负的速率敏感的标度系数。

在理想的情况下，标度系数 $S_g = 1$ ，此时

$$K \alpha_o \cong H \omega_i$$

即

$$\alpha_o = \frac{H}{K} \omega_i$$

当 S_g 不等于 1 时, 则:

$$\dot{\alpha}_0 = \frac{H}{K S_g} \omega_i = \frac{\alpha_0}{S_g}$$

把 α_0 量化, 用 q_a 表示量化电平, n_a 表示脉冲数, 则

$$\alpha_0 = q_a n_a$$

由

$$\omega_i = \frac{K}{H} \alpha_0$$

有

$$\omega_i = \frac{K}{H} q_a n_a$$

表示

$$\omega_i \Delta t = \delta \theta_i$$

则

$$\delta \theta_i = \frac{K}{H} q_a n_a \Delta t$$

输出

$$\Delta \theta_i = \sum \delta \theta_i$$

(8) 再平衡回路方程

考虑到上述各项误差时, 再平衡回路方程可以写作

$$I_o \ddot{\alpha}_0 + c_o \dot{\alpha}_0 + K \alpha_0 = M$$

式中

$$M = H(\omega_i + e_D + e_R + \varepsilon_R + e_T + e_g)$$

e_0 、 e_D 、 e_R 、 e_T 、 e_g 都是误差项。

三、单自由度浮子陀螺的误差补偿

单自由度浮子陀螺的误差补偿, 通常是补偿力矩器的标度系数误差、飞行器的角运动引起的动态误差、偏置和飞行器的线运动引起的误差。其补偿信号的流程如图 2-6 所示。

1. 标度系数补偿

用 $\tilde{\omega}_i$ 表示仪表测量的角速度, ω_i 表示真实的输入角速度, $\delta\omega_i$ 表示误差项, 则由

$$\tilde{\omega}_i = S_g^{-1}(\omega_i + \delta\omega_i)$$

即

$$\omega_i = S_g \tilde{\omega}_i - \delta\omega_i$$

用角增量表示时

$$\omega_i \Delta t = S_g \tilde{\omega}_i \Delta t - \delta\omega_i \Delta t$$

即:

$$\Delta \theta_i = S_g \Delta \tilde{\theta}_i - \delta\omega_i \Delta t \quad (2-23)$$

用仪表输出的角增量表示标度系数时, 其表达式为

$$S_g = 1 + S_{g0(+)} S_{g1(+)} \frac{\Delta \tilde{\theta}_i}{\Delta t} \quad \Delta \tilde{\theta}_i \geq 0$$

$$S_p = 1 + S_{g0(-)} + S_{g1(-)} \frac{\Delta\theta_0}{\Delta t} \quad \Delta\theta_0 < 0$$

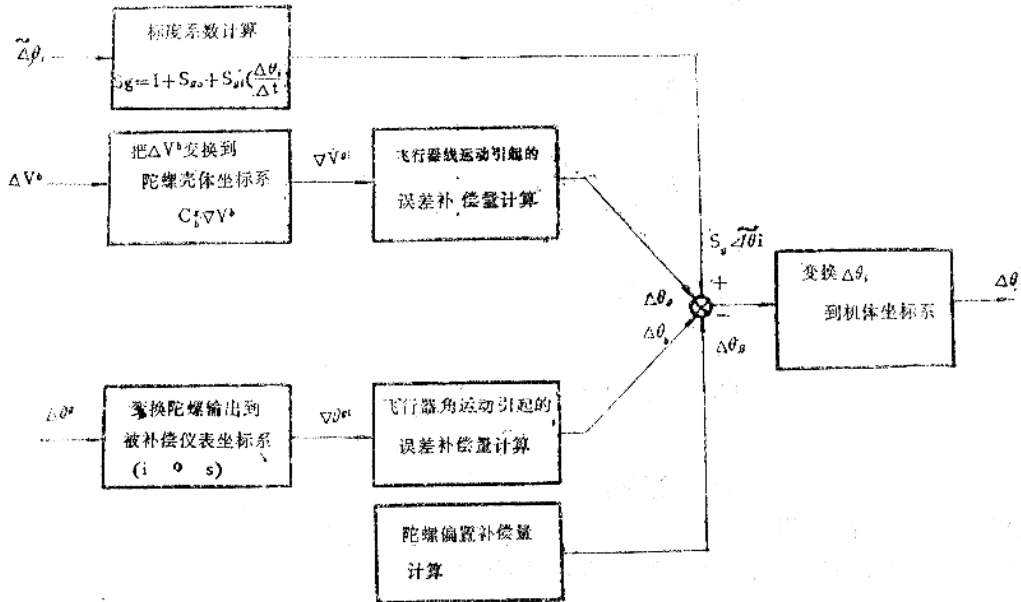


图2-6 单自由度浮子陀螺误差补偿

2. 飞行器的角运动引起的误差补偿

飞行器的角运动引起的漂移如(2-14)式所示。如果用角增量表示则为

$$\begin{aligned} \Delta\theta_0 &= \varepsilon_D \Delta t \\ &= \frac{\Delta t}{H} [(I_s - I_i) \omega_i \omega_s + \frac{H}{K} (I_s - I_i) (\omega_i^2 - \omega_s^2) \omega_i] \\ &\quad - \frac{H^2}{K} \omega_i \omega_s - I_s \dot{\omega}_s] \\ &= \frac{1}{H} \{ (I_s - I_i) \Delta\theta_0 \Delta\theta_s / \Delta t + \frac{H}{K} (I_s - I_i) (\Delta\theta_i^2 - \Delta\theta_s^2 \Delta\theta_i) / \Delta t^2 \\ &\quad - \frac{H^2}{K} \Delta\theta_0 \Delta\theta_s / \Delta t - I_s (\Delta\theta_s(n+1) - \Delta\theta_s(n)) / \Delta t \} \end{aligned} \quad (2-24)$$

式中 $\Delta\theta_0$ 为被补偿陀螺仪输出的角增量信号。这个角增量信号可以是没有经过误差补偿的, 这种用未经过补偿的陀螺仪输出来计算补偿信号的方法称作开环补偿。其补偿原理如图 2-7 所示。图中虚线表示对另外两个通道进行补偿计算的信号。如果 $\Delta\theta_0$ 用经过误差补偿以后的陀螺输出, 则这样的补偿方法称作闭环补偿, 其补偿原理如图 2-8 所示。显然, 闭环补偿由于计算补偿量的信号比较准确, 所以计算的补偿量精度高。但是, 由于补偿量形成一个反馈信号, 影响系统的动态特性, 所以要在保证系统动态特性的条件下采用。

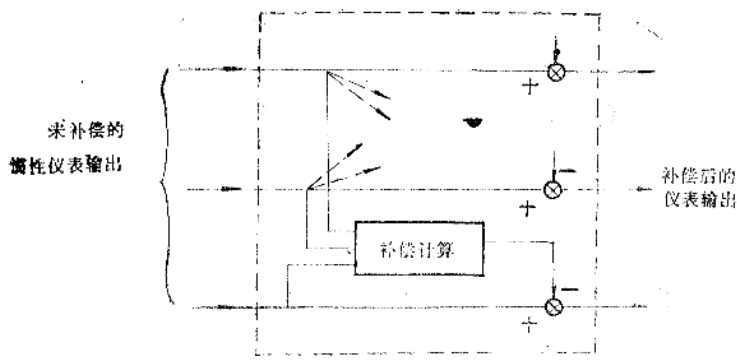


图2-7 开环补偿

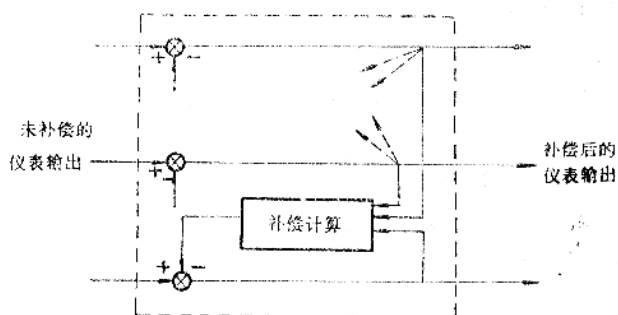


图2-8 闭环补偿

$\Delta\theta_s$ 和 $\Delta\theta_o$ 为被补偿陀螺马达自转轴向和输出轴向陀螺仪的输出角增量。

3. 偏置误差的补偿

陀螺偏置是一个常值的漂移速度，因此，偏置所产生的角增量误差信号为：

$$\Delta\theta_B = \varepsilon_B \Delta t \quad (2-25)$$

4. 飞行器的线运动引起的误差补偿

飞行器的线运动引起的陀螺误差如(2-20)式所表示，式中各项误差系数 D 可按解析表达式计算求得，也可以用实验的方法通过实验数据处理得到。这些系数都是常值。式中 f_i 、 f_o 、 f_s 为沿 i 、 s 、 o 轴向的比力，分别由沿 i 、 s 、 o 轴向的导航加速度表所测量。通常加速度表的输出为速度增量，即 $\Delta V_i = f_i \Delta t$ ， $\Delta V_s = f_s \Delta t$ ， $\Delta V_o = f_o \Delta t$ 。故(2-20)式如果用角度增量表示时，则可以写作

$$\begin{aligned} \Delta\theta_g &= \varepsilon_g \Delta t \\ &= D_i \Delta V_i + D_o \Delta V_o + D_s \Delta V_s \\ &\quad + (D_{ii} \Delta V_i^2 + D_{ss} \Delta V_s^2 + D_{oo} \Delta V_i \Delta V_o + D_{is} \Delta V_i \Delta V_s \\ &\quad + D_{os} \Delta V_o \Delta V_s) / \Delta t \end{aligned} \quad (2-26)$$

综合以上计算，(2-23)式可以写作

$$\Delta\theta_i = S_g \Delta \bar{\theta}_i - (\Delta\theta_o + \Delta\theta_B + \Delta\theta_g) \quad (2-27)$$

(2-27) 式即图 2-5 所示的单自由度浮子陀螺误差补偿表达式。

如果考虑陀螺仪的安装误差, 则三个经过误差补偿的陀螺仪输出角增量再变换到机体坐标系即

$$\Delta\theta^b = C_2^b \Delta\theta^g \quad (2-28)$$

式中 $\Delta\theta^g$ ——三个陀螺仪的输出角增量构成的列矢量。

C_2^b ——三个陀螺输入轴构成的坐标系和机体坐标系之间的变换矩阵。

§ 2-2 挠性陀螺的模型及误差补偿

动力调谐挠性陀螺仪是目前已广泛应用的惯导级的陀螺仪之一。其特点是体积较小, 成本较低, 平均故障间隔时间较长。自六十年代中期以来, 广泛应用航空、航海、战术及战略导弹中。美国台利且公司制造的捷联式动力调谐陀螺精度达 0.001 度/小时, 外形尺寸为 $\phi 7.62 \times 7$ 厘米, 重约 0.9 公斤。

动力调谐挠性陀螺中, 驱动轴与转子之间的挠性接头是由两对相互垂直的扭杆和一个平衡环组成, 如图 2-9 所示。一对共轴线的内扭杆与驱动轴及平衡环固联, 另一对共轴线的扭杆与平衡环及转子固联, 内扭杆轴线垂直于驱动轴轴线, 外扭杆轴线垂直于内扭杆轴线, 并且内、外扭杆轴线与驱动轴轴线相交于一点。当驱动电机使驱动轴旋转时, 驱动轴通过内扭杆带动平衡环旋转, 平衡环再通过外扭杆带动转子旋转。当转子绕内扭杆轴线有转角时, 通过外扭杆带动平衡环一起绕内扭杆轴线偏转, 这时内扭杆产生扭转弹性变形。当转子绕外扭

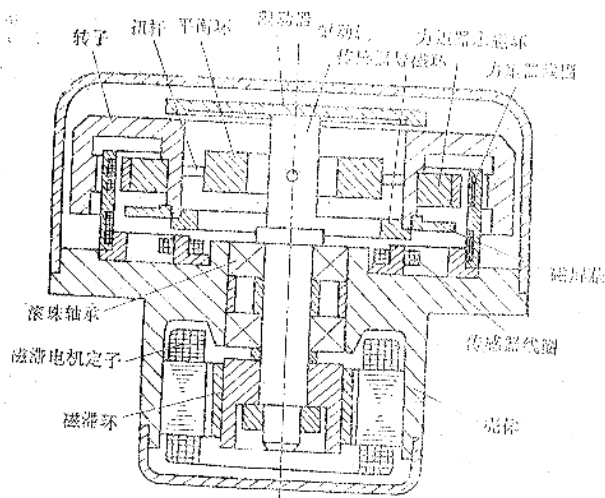
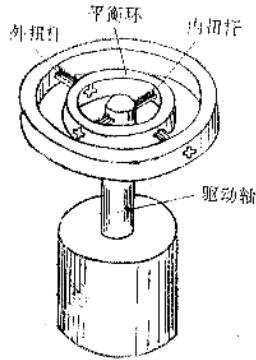


图2-9 动力调谐挠性陀螺的挠性接头

图2-10 动力调谐挠性陀螺结构原理图

杆轴线有转角时, 并不会带动平衡环绕外扭杆轴线偏转, 仅是外扭杆产生扭转弹性变形。由内外扭杆和平衡环所组成的挠性接头, 一方面起着支承转子的作用, 另一方面又提供了所需要的转动自由度。因此, 内、外扭杆绕其自身轴线应具有很低的扭转刚度, 而绕与内、外扭杆轴线垂直的方向应具有高的抗弯刚度。

动力调谐挠性陀螺仪的结构原理如图 2-10 所示。从图中可见, 挠性接头是放置在转子

的内腔，而且工作时平衡环和内、外扭杆随同转子一起高速旋转。信号传感器用来检测仪表壳体相对自转轴的转角，一般采用电感式传感器或电容式传感器。图中所示的是电感式传感器，其导磁环固装在转子上，而铁芯和线圈固装在表壳上。力矩器则用来对陀螺施加控制力矩，一般采用永磁式力矩器或涡流杯式力矩器，图中所示的是永磁式力矩器，其导磁环固装在转子上，而线圈固装在表壳上。捷联式挠性陀螺由传感器、电子线路和力矩器构成再平衡回路，工作在闭环状态。此外，为了防止扭杆的扭转角度过大，在驱动轴上固定有限动器，用来限制陀螺的工作转角。

陀螺仪工作中，当自转轴与驱动轴之间出现相对偏角时，由于扭杆的扭转变形，会产生弹性力矩作用到转子上，即它同样具有一般的机械弹簧效应。但是，当自转轴与驱动轴之间出现相对偏角时，由于平衡环的振荡运动或称扭摆运动，将产生一个与一般的机械弹性力矩相反的动力反弹性力矩作用到转子上，即“所谓动力反弹效应”。在仪表设计和调试中，使平衡环的动力反弹性力矩正好补偿挠性支承的机械弹性力矩，则陀螺转子不再受挠性支承的弹性约束而变成了自由转子。即自转轴相对惯性空间具有很高的方位稳定性。这就是所谓“动力调谐”。

一、挠性陀螺仪动力学

为了推导简化的动力调谐陀螺仪的动力学方程，我们取一个壳体坐标系 $ox_c y_c z_c$ 和仪表壳体固联，如果考虑仪表没有安装误差，则认为 $x_c y_c z_c$ 和机体坐标系 $x_b y_b z_b$ 重合。另外再取一个转子参考坐标系 $ox_r y_r z_r$ 。 x_r, y_r 在转子平面内但不随转子自转， z_r 和转子的瞬时角动量 H_r 一致，考虑仪表工作过程中转子相对驱动轴线有偏角 α_x, α_y ，如图 2—11 所示。对转子应用动量矩定理，则有：

$$\mathbf{M}_r = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{H}_r \right)_r$$

式中

\mathbf{M}_r —— 绕质量中心作用在转子上的外加力矩。

\mathbf{H}_r —— 转子的角动量

$\left(\frac{d}{dt} \mathbf{H}_r \right)_r$ —— \mathbf{H}_r 相对惯性空间的时间导数。

利用角动量矢量的绝对导数和相对导数的关系，则上式可写作

$$\mathbf{M}_r = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{H}_r \right)_r + \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{H}_r$$

或

$$\mathbf{M}_r = \dot{\mathbf{H}}_r + \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{H}_r \quad (2-29)$$

式中

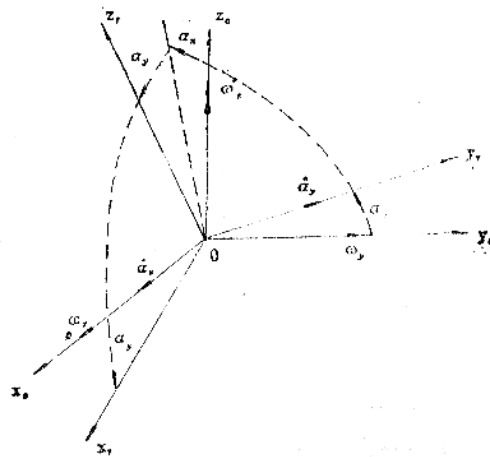


图2—11 转子参考坐标系

$$\omega_{i,r}^r = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

把转子相对惯性空间的角速度 ω_i 用转子相对壳体的角速度 ω_{ic} 和转子相对壳体的角速度 ω_{cr} 相加来表示, 即

$$\omega_{ir} = \omega_{ic} + \omega_{cr}$$

或

$$\omega_{i,r}^r = C_c^r (\omega_{ic}^c + \omega_{cr}^c) \quad (2-30)$$

式中

$$\omega_{ic}^c = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$$

为壳体相对惯性空间的角速度在壳体坐标系轴向分量构成的列矢量。当考虑仪表的安装误差角为零时, 则这个角速度即飞行器绕机体坐标系三个轴向的转动角速度。也就是需要测量的角速度。

C_c^r 为壳体坐标系和转子参考坐标系之间的变换矩阵。在图 2-10 中, 考虑 α_x, α_y 很小, 则有

$$C_c^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha_y \\ 0 & 1 & \alpha_x \\ \alpha_y & -\alpha_x & 1 \end{bmatrix}$$

从图 2-11 看出, 转子相对壳体的角速度 ω_{cr}^c 可近似的写作

$$\omega_{cr}^c = [\alpha_x \quad \alpha_y \quad 0]^T$$

把 $\omega_{i,r}^r$, ω_{ic}^c , C_c^r 代入 (2-30) 并展开得:

$$\omega_{i,r}^r = \begin{bmatrix} \omega_{ix} \\ \omega_{iy} \\ \omega_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x + \alpha_x - \alpha_y \omega_z \\ \omega_y + \alpha_y + \alpha_x \omega_z \\ \omega_z + \alpha_y \omega_x - \alpha_x \omega_y \end{bmatrix} \quad (2-31)$$

角动量 H_r 可以写作

$$H_r = I \omega_{ir} + H \quad (2-32)$$

式中 H ——为转子自转的角动量,

I ——为转子绕支点的转动惯量, 如果不考虑惯性积而只考虑主转动惯性, 则 I 可表示为

$$I = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (2-33)$$

把 (2-33)、(2-32)、(2-31) 代入 (2-29) 并展开得

$$\left. \begin{aligned} M_x &= A\dot{\omega}_{rx} + H\omega_{ry} + (C-A)\omega_{ry}\omega_{rz} \\ M_y &= A\dot{\omega}_{ry} - H\omega_{rx} - (C-A)\omega_{rx}\omega_{rz} \end{aligned} \right\} \quad (2-34)$$

在(2-34)式中考虑了 $A=B$ 。由(2-31)式有

$$\left. \begin{aligned} \omega_{rx} &= \omega_x + \dot{\alpha}_x - \alpha_y \omega_z \\ \omega_{ry} &= \omega_y + \dot{\alpha}_y + \alpha_x \omega_z \\ \omega_{rz} &= \omega_z + \alpha_y \omega_x - \alpha_x \omega_y \end{aligned} \right\} \quad (2-35)$$

从(2-34)式看出, 等式右边第二项是基本项, 其余各项都是必需补偿的误差力矩项, 如果按(2-34)式把角加速度误差项 $A\dot{\omega}_{rx}$ 和 $A\dot{\omega}_{ry}$ 补偿掉, 再把 $(C-A)\omega_{ry}\omega_{rz}$, $(C-A)\omega_{rx}\omega_{rz}$ 非等惯性项补偿掉, 然后按(2-35)式计算出 ω_x , ω_y , ω_z 。这也是一种补偿飞行器角运动所引起的动态误差的方法。

把(2-35)式代入(2-34)式并稍作整理得

$$\begin{aligned} M_x &= A(\dot{\omega}_x + \ddot{\alpha}_x) + H(\omega_y + \dot{\alpha}_y) + (C-A)\omega_y \omega_z \\ &\quad + \alpha_x [(C-A)(\omega_z^2 - \omega_y^2) + H\omega_z] + \alpha_y [(C-A)\omega_y \omega_x \\ &\quad - A\dot{\omega}_z] \\ M_y &= A(\dot{\omega}_y + \ddot{\alpha}_y) - H(\omega_x + \dot{\alpha}_x) - (C-A)\omega_x \omega_z \\ &\quad - \alpha_y [(C-A)(\omega_z^2 - \omega_x^2) - H\omega_z] + \alpha_x [(C-A)\omega_y \omega_x + A\dot{\omega}_z] \end{aligned}$$

再整理后可得

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{\alpha}_x + H\dot{\alpha}_y &= -H\omega_y + M_x - M_{dx} \\ A\ddot{\alpha}_y - H\dot{\alpha}_x &= H\omega_x + M_y - M_{dy} \end{aligned} \right\} \quad (2-36)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} M_{dx} &= (C-A)\omega_y \omega_z + \alpha_x [(C-A)(\omega_z^2 - \omega_y^2) + H\omega_z] \\ &\quad + \alpha_y [(C-A)\omega_y \omega_x - A\dot{\omega}_z] + A\dot{\omega}_x \\ M_{dy} &= -(C-A)\omega_x \omega_z - \alpha_y [(C-A)(\omega_z^2 - \omega_x^2) - H\omega_z] \\ &\quad + \alpha_x [(C-A)\omega_y \omega_x + A\dot{\omega}_z] + A\dot{\omega}_y \end{aligned} \right\} \quad (2-37)$$

M_x 和 M_y 是由力矩器作用到转子上的外力矩, 考虑再平衡回路的总增益系数为 K , 则 M_x 和 M_y 可表示为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -K\alpha_y \\ M_y &= +K\alpha_x \end{aligned} \right\} \quad (2-38)$$

代入(2-36)式得

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{\alpha}_x + H\dot{\alpha}_y + K\alpha_y &= -H\omega_y - M_{dx} \\ A\ddot{\alpha}_y - H\dot{\alpha}_x - K\alpha_x &= H\omega_x - M_{dy} \end{aligned} \right\} \quad (2-39)$$

取位氏变换得

$$\left. \begin{aligned} AS^2\alpha_x(S) + (HS + K)\alpha_y(S) &= -H\omega_y(S) - M_{dx}(S) \\ AS^2\alpha_y(S) - (HS + K)\alpha_x(S) &= H\omega_x(S) - M_{dy}(S) \end{aligned} \right\} \quad (2-40)$$

系统方块结构图如图 2—12 所示。(2—40) 是动力调谐挠性陀螺的简化动力学方程。显然, 如果不考虑转动惯量 A 所引起的交连影响则:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_y(S) &= \frac{-H\omega_y(S) - M_{dx}(S)}{HS + K} \\ \alpha_x(S) &= \frac{-H\omega_x(S) + M_{dy}(S)}{HS + K} \end{aligned} \right\} \quad (2-41)$$

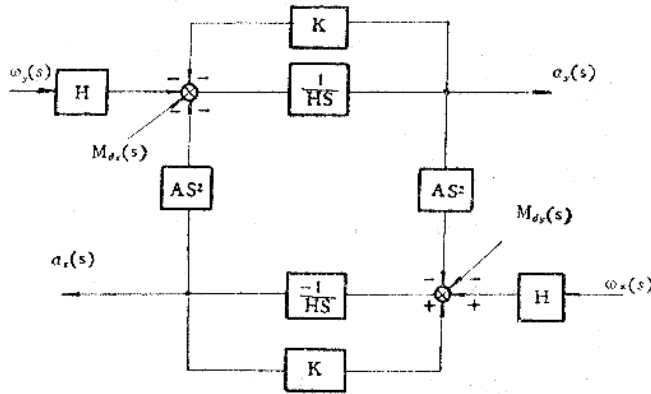


图2—12 动力调谐陀螺仪系统方块图

二、动力调谐挠性陀螺的模型方程

动力调谐挠性陀螺仪的模型方程主要考虑以下几个部分:

- (1) 飞行器的角运动引起的误差, 这种误差通常称作动态误差。
- (2) 由飞行器的线运动引起的误差。
- (3) 陀螺偏置。
- (4) 力矩器的标度系数误差。

(2) — (3) 两项误差通常称作静态误差。这四种误差都是可以补偿的, 其他的误差如随机误差, 起动时的瞬变过程误差等用通常的方法难以进行补偿, 所以就不讨论了。按(2—40)式, 当不考虑转动惯量 A 所引起的交连影响时, 则陀螺仪的单轴模型如图 2—13 所示。

1. 飞行器的角运动所引起的误差

由(2—37)式的误差力矩表达式可以看出, 由飞行器的角运动引起的漂移速率为

$$\varepsilon_{Dy} = \frac{-M_{dx}}{H}$$

$$\varepsilon_{Dx} = \frac{M_{dy}}{H}$$

把 M_{dx} , M_{dy} 的表达式代入得

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Dy} &= \frac{-1}{H} (C - A)\omega_y\omega_z - \frac{1}{H}\alpha_x[(C - A)(\omega_z^2 - \omega_y^2) + H\omega_z] \\ &\quad - \frac{1}{H}\alpha_y[(C - A)\omega_y\omega_x - A\dot{\omega}_z] - \frac{A}{H}\dot{\omega}_x \end{aligned} \quad (3-42)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Dx} = & -\frac{1}{H}(C-A)\omega_x\omega_z - \frac{1}{H}\alpha_y[(C-A)(\omega_z^2 - \omega_y^2) - H\omega_z] \\ & + \frac{1}{H}\alpha_x[(C-A)\omega_y\omega_x + A\dot{\omega}_z] + \frac{A}{H}\dot{\omega}_y \end{aligned} \quad (3-43)$$

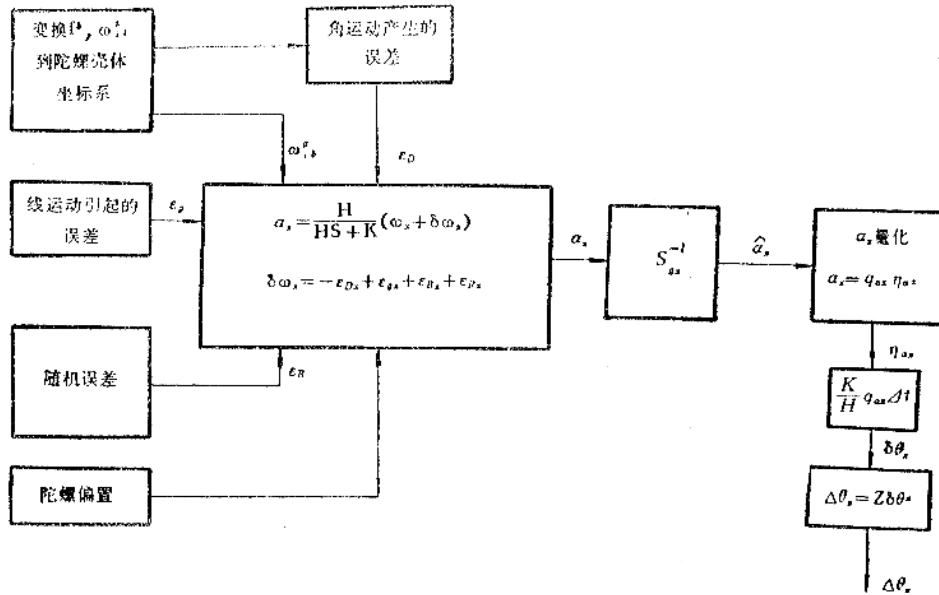


图2-13 挠性陀螺仪单轴模型

上式中右边第一项 $-\frac{1}{H}(C-A)\omega_x\omega_z$ 和 $-\frac{1}{H}(C-A)\omega_x\omega_z$ 称作不等惯性漂移，如果调谐陀螺的转子形状近似球形，则 $C-A$ 将接近为零。此项误差也近似为零。对动力调谐陀螺 $C-A$ 难以作得很小，因此，不等惯性漂移是一个主要误差项。第二项 $\frac{1}{H}\alpha_x[(C-A)(\omega_z^2 - \omega_y^2) + H\omega_z]$ 和 $-\frac{1}{H}\alpha_y[(C-A)(\omega_y^2 - \omega_z^2) - H\omega_z]$ 叫作交叉耦合漂移项。第三项 $\frac{1}{H}\alpha_y[(C-A)\omega_y\omega_x - A\dot{\omega}_z]$ 和 $-\frac{1}{H}\alpha_x[(C-A)\omega_y\omega_x + A\dot{\omega}_z]$ 为转子动态偏角产生的漂移。最后一项是由飞行器角加速度引起的误差。第二项和第三项都和转子的偏角 α_x 和 α_y 成正比。 α_x 和 α_y 为陀螺仪的输出角。在进行误差补偿计算时， α_x 和 α_y 可以从信号传感器的输出中获得。也可以考虑在再平衡回路中力矩器的力矩主要是平衡由输入角速度产生的陀螺力矩，即

$$\begin{aligned} H\omega_y &\approx K\alpha_y \\ H\omega_x &\approx K\alpha_x \\ \left. \begin{aligned} \alpha_y &= \frac{H}{K}\omega_y \\ \alpha_x &= \frac{H}{K}\omega_x \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3-44)$$

把(3-44)式代入(3-42)(3-43)式则得:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Dy} = & \frac{-1}{H} (C-A)\omega_y \omega_z - \frac{1}{K} \omega_x [(C-A)(\omega_z^2 - \omega_y^2) + H\omega_z] \\ & - \frac{1}{K} \omega_y [(C-A)\omega_y \omega_x - A\dot{\omega}_z] - \frac{A}{H} \dot{\omega}_x \end{aligned} \quad (2-45)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Dz} = & -\frac{1}{H} (C-A)\omega_x \omega_z - \frac{1}{K} \omega_y [(C-A)(\omega_z^2 - \omega_x^2) - H\omega_z] \\ & + \frac{1}{K} \omega_x [(C-A)\omega_y \omega_x + A\dot{\omega}_z] + \frac{A}{H} \dot{\omega}_y \end{aligned} \quad (2-46)$$

2. 飞行器的线运动引起的误差

飞行器的线运动引起的动力调谐陀螺仪的漂移误差和单自由度浮子陀螺仪的情况类似, 主要由两部分组成, 即质量不平衡误差和非等弹性误差。

(1) 质量不平衡误差

$$\mathbf{M}_{e1} = m(\mathbf{f}^r \times \delta) \quad (2-47)$$

如果考虑质心只沿 z 轴相对支承点有偏移, 则

$$\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_z \end{bmatrix}$$

考虑

$$\mathbf{f}^r \cong \mathbf{f}^c = [f_x, f_y, f_z]^T$$

代入 (2-47) 式并展开得

$$\left. \begin{aligned} M_{e1x} &= m f_y \delta_z \\ M_{e1y} &= -m f_x \delta_z \end{aligned} \right\} \quad (2-48)$$

(2) 不等弹性引起的误差

$$\mathbf{M}_{e2} = m(\mathbf{f}^r \times \delta) \quad (2-49)$$

式中

$$\begin{aligned} \delta &= m[\mathbf{K}]\mathbf{f} \quad (2-50) \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

把 (2-50) 代入 (2-49) 并展开得

$$\left. \begin{aligned} M_{e2x} &= m^2 [K_{zx} f_y f_x + K_{zy} f_y^2 + K_{zz} f_y f_z - K_{yx} f_z f_x \\ &\quad - K_{yy} f_z f_y - K_{yz} f_z^2] \\ M_{e2y} &= m^2 [K_{xx} f_z f_x + K_{xy} f_z f_y + K_{xz} f_z^2 - K_{zx} f_z^2 - K_{zy} f_x f_y \\ &\quad - K_{zz} f_x f_z] \end{aligned} \right\} \quad (2-51)$$

总的静态误差力矩为

$$\begin{aligned} M_{ex} &= M_{e1x} + M_{e2x} \\ &= m \delta_z f_y + m^2 [K_{zx} f_y f_x + K_{zy} f_y^2 + K_{zz} f_y f_z - K_{yx} f_z f_x \\ &\quad - K_{yy} f_z f_y - K_{yz} f_z^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{ey} &= M_{e1y} + M_{e2y} \\
 &= -m\delta_z f_x + m^2[K_{xx}f_z f_x + K_{xy}f_z f_y + K_{xz}f_x^2 \\
 &\quad - K_{zx}f_x^2 - K_{zy}f_x f_y - K_{yz}f_x f_z]
 \end{aligned}$$

由静态误差力矩引起的陀螺漂移为

$$\begin{aligned}
 e_{ax} &= \frac{M_{ey}}{H} \\
 -e_{ay} &= \frac{M_{ex}}{H}
 \end{aligned}$$

表示

$$\begin{aligned}
 D_{y1} &= \frac{m\delta_z}{H} & D_{x1} &= \frac{-m\delta_z}{H} \\
 D_{y2} &= \frac{m^2 K_{zy}}{H} & D_{x2} &= \frac{m^2 K_{xz}}{H} \\
 D_{y3} &= \frac{-m^2 K_{yz}}{H} & D_{x3} &= \frac{m^2 K_{zx}}{H} \\
 D_{y4} &= \frac{m^2 K_{xx}}{H} & D_{x4} &= \frac{m^2 K_{xx}}{H} \\
 D_{y5} &= \frac{m^2 K_{zz}}{H} & D_{x5} &= \frac{m^2 K_{xy}}{H} \\
 D_{y6} &= \frac{m^2 K_{yz}}{H} & D_{x6} &= \frac{m^2 K_{zy}}{H} \\
 D_{y7} &= \frac{m^2 K_{yy}}{H} & D_{x7} &= \frac{m^2 K_{yz}}{H}
 \end{aligned}$$

则有

$$\left. \begin{aligned}
 e_{ax} &= D_{x1}f_x + D_{x2}f_x^2 + D_{x3}f_x^2 + D_{x4}f_z f_x + D_{x5}f_z f_y \\
 &\quad + D_{x6}f_x f_y + D_{x7}f_x f_z \\
 -e_{ay} &= D_{y1}f_y + D_{y2}f_y^2 + D_{y3}f_x^2 + D_{y4}f_y f_x + D_{y5}f_y f_z \\
 &\quad + D_{y6}f_z f_x + D_{y7}f_z f_y
 \end{aligned} \right\} \quad (2-52)$$

3. 陀螺偏置 ε_B

陀螺偏置是由常值力矩产生的常值漂移，和飞行器的角运动和线运动都无关。对动力调谐陀螺仪两个测量轴的偏置我们分别用 ε_{Bx} 和 ε_{By} 表示。

4. 力矩器的标度系数误差

动力调谐挠性陀螺仪力矩器的标度系数误差可以认为和单自由度浮子陀螺仪力矩器的标度系数误差相同，主要由常值项和比例于输入角速度的项构成，对正的和负的角速度输入，标度系数具有不同的值，故标度系数可表示为

$$\left. \begin{aligned}
 S_{\theta_x}(+) &= [1 + S_{\theta_x0}(+) + S_{\theta_x1}(+) \frac{K\alpha_x}{H}] & \alpha_x \geq 0 \\
 S_{\theta_x}(-) &= [1 + S_{\theta_x0}(-) + S_{\theta_x1}(-) \frac{K\alpha_x}{H}] & \alpha_x < 0 \\
 S_{\theta_y}(+) &= [1 + S_{\theta_y0}(+) + S_{\theta_y1}(+) \frac{K\alpha_y}{H}] & \alpha_y \geq 0 \\
 S_{\theta_y}(-) &= [1 + S_{\theta_y0}(-) + S_{\theta_y1}(-) \frac{K\alpha_y}{H}] & \alpha_y < 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2-53)$$

式中:

$S_{\theta_x0}(+)$, $S_{\theta_y0}(+)$, $S_{\theta_x0}(-)$, $S_{\theta_y0}(-)$ 为正向和负向的常值标度系数。

$S_{\theta_x1}(+)$, $S_{\theta_y1}(+)$, $S_{\theta_x1}(-)$, $S_{\theta_y1}(-)$ 为正向和负向的速率敏感的标度系数。

在理想的情况下, 标度系数 $S_{\theta_i} = 1$, 此时

$$K\alpha_x \approx H\omega_x$$

$$K\alpha_y \approx H\omega_y$$

即

$$\alpha_x = \frac{H}{K} \omega_x$$

$$\alpha_y = \frac{H}{K} \omega_y$$

当 S_{θ_i} 不等于 1 时, 则

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= \frac{H}{K S_{\theta_i}} \omega_i & (i=x, y) \\
 &= \frac{\alpha_i}{S_{\theta_i}}
 \end{aligned}$$

把 α_i 量化, 用 q_{α_i} 表示量化电平, n_{α_i} 表示脉冲数, 则

$$\alpha_i = q_{\alpha_i} n_{\alpha_i}$$

故

$$\omega_x = \frac{K}{H} \alpha_x = \frac{K}{H} q_{\alpha_x} n_{\alpha_x}$$

$$\omega_y = \frac{K}{H} \alpha_y = \frac{K}{H} q_{\alpha_y} n_{\alpha_y}$$

表示

$$\omega_x \Delta t = \delta\theta_x$$

$$\omega_y \Delta t = \delta\theta_y$$

则

$$\delta\theta_x = \frac{K}{H} q_{\alpha_x} n_{\alpha_x} \Delta t$$

$$\delta\theta_y = \frac{K}{H} q_{\alpha_y} n_{\alpha_y} \Delta t$$

输出为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\theta_x &= \sum \delta\theta_x \\ \Delta\theta_y &= \sum \delta\theta_y \end{aligned} \right\} \quad (2-54)$$

三、动力调谐陀螺仪的误差补偿

动力调谐陀螺仪的误差补偿也和单自由度浮子陀螺仪的误差补偿类似, 先对仪表的输出进行标度系数的误差补偿, 然后利用三个捷联式加速度表的输出速度增量和两个挠性陀螺测量的飞行器绕机体坐标系三个轴转动的角增量计算误差补偿量。把计算的补偿量和经过标度系数补偿的仪表输出量相综合来完成误差的补偿。挠性陀螺单轴误差补偿流程图如图2-14所示。

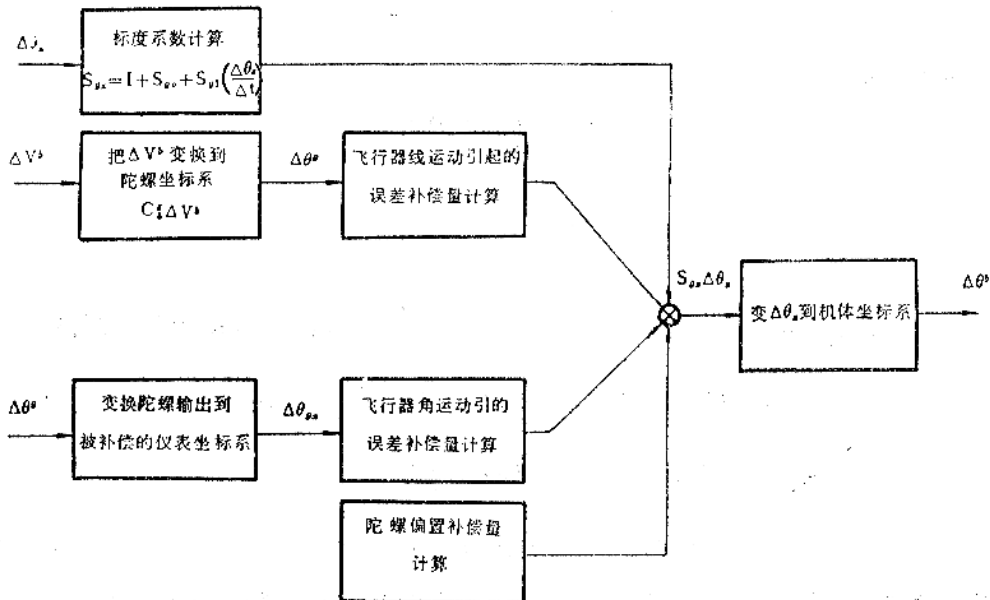


图2-14 挠性陀螺单轴误差补偿流程图

1. 标度系数补偿

用 $\bar{\omega}_x$ 表示仪表测量的角速度, ω_x 表示真实的输入角速度, $\delta\omega_x$ 表示全部的误差项, 则

$$\bar{\omega}_x = S_{gx}^{-1}(\omega_x + \delta\omega_x)$$

即

$$\omega_x = S_{gx}\bar{\omega}_x - \delta\omega_x$$

用增量表示时

$$\sum \omega_x \Delta t = \sum S_{gx} \bar{\omega}_x \Delta t - \sum \delta\omega_x \Delta t$$

即

$$\Delta\theta_x = \Delta\bar{\theta}_x - \sum \delta\omega_x \Delta t$$

用仪表输出的角增量表示的标度系数为

$$S_{gx} = 1 + S_{gx0}(+) + S_{gx1}(+) \frac{\Delta\theta_x}{\Delta t} \quad \Delta\theta_x \geq 0$$

$$S_{gx} = 1 + S_{gx0}(-) + S_{gx1}(-) \frac{\Delta\theta_x}{\Delta t} \quad \Delta\theta_x < 0$$

2. 飞行器的角运动引起的误差补偿

(2-45) 和 (2-46) 式已给出由飞行器的角运动引起的漂移误差表达式:

$$\begin{aligned} -e_{Dx} = & -\frac{1}{H} (C-A) \omega_x \omega_z - \frac{1}{K} \omega_y [(C-A)(\omega_x^2 - \omega_z^2) - H\omega_x] \\ & + \frac{1}{K} \omega_x [(C-A) \omega_y \omega_z + A\dot{\omega}_z] + \frac{A}{H} \dot{\omega}_y \end{aligned} \quad (3-46)$$

如果考虑在仪表采样周期内角速度为常值, 则角速度可表示为

$$\omega_i = \frac{\Delta\theta_i}{\Delta t} \quad (i=x, y, z)$$

角加速度可表示为

$$\dot{\omega}_i = \frac{\Delta\theta_i(n+1) - \Delta\theta_i(n)}{\Delta t^2}$$

表示

$$\Delta\theta_{Dx} = e_{Dx} \Delta t$$

则

$$\begin{aligned} -\Delta\theta_{Dx} = & -\frac{1}{H} (C-A) \Delta\theta_x \Delta\theta_y / \Delta t - \frac{1}{K} \Delta\theta_y [(C-A)(\Delta\theta_x^2 - \Delta\theta_z^2) / \Delta t^2 \\ & - H \Delta\theta_z / \Delta t + \frac{1}{K} \Delta\theta_x \{(C-A) \Delta\theta_y \Delta\theta_z / \Delta t^2 \\ & + A[\Delta\theta_z(n+1) - \Delta\theta_z(n)] / \Delta t^2\} \\ & + \frac{A}{H} [\Delta\theta_y(n+1) - \Delta\theta_y(n)] / \Delta t^2 \end{aligned} \quad (2-55)$$

用陀螺仪的输出, 按 (2-55) 式计算动态误差的补偿量。\$\Delta\theta_i\$ (\$i=x, y, z\$) 可以用经过误差补偿的陀螺仪的输出, 此时补偿信号相当于一个负反馈信号, 这样的补偿称作“闭环补偿”。如果 \$\Delta\theta_i\$ 直接用未经过补偿的陀螺的输出, 则称作“开环补偿”。由于 \$\Delta\theta_i\$ 中存在着误差, 所以计算的补偿量也有误差, 故补偿后会仍有剩余误差。

3. 陀螺偏置的补偿

陀螺偏置是一个常值的漂移速度, 因此, 偏置所产生的角增量误差信号为:

$$-\Delta\theta_{Dx} = -e_{Bx} \Delta t \quad (2-56)$$

陀螺偏置的补偿信号即可按上式计算。

4. 飞行器的线运动引起的误差补偿

飞行器的线运动引起的陀螺漂移误差表达式为 (2-52) 式, 即:

$$\begin{aligned} -e_{gx} = & D_{x1} f_x + D_{x2} f_x^2 + D_{x3} f_y^2 + D_{x4} f_z f_x + D_{x5} f_z f_y \\ & + D_{x6} f_x f_y + D_{x7} f_x f_z \end{aligned} \quad (2-52)$$

式中 \$f_x, f_y, f_z\$ 可由沿机体坐标式轴向安装三个导航加速度表的输出中求出, 导航加速

度表的输出是速度增量，考虑采样周期很短，在采样周期内 f_x, f_y, f_z 为常值，即

$$f_i = \frac{\Delta V_i}{\Delta t} \quad (i=x, y, z)$$

表示

$$\Delta \theta_{gx} = \epsilon_{gx} \Delta t$$

则补偿信号为

$$\begin{aligned} +\Delta \theta_{gx} = & -[D_{x1}\Delta V_x + D_{x2}\Delta V_x^2/\Delta t + D_{x3}\Delta V_x^3/\Delta t + D_{x4}\Delta V_x\Delta V_y/\Delta t \\ & + D_{x5}\Delta V_x\Delta V_z/\Delta t + D_{x6}\Delta V_x\Delta V_y/\Delta t \\ & + D_{x7}\Delta V_x\Delta V_z/\Delta t] \end{aligned} \quad (2-57)$$

按上式计算补偿信号时， $\Delta V_i (i=x, y, z)$ 可以用经过误差补偿的加速度输出信号。对陀螺来说只是对其输出外加一个补偿量。

动力调谐挠性陀螺仪总的单轴补偿表达式为

$$\Delta \theta_x = S_{gx} \Delta \theta_x - (\Delta \theta_{Dx} - \Delta \theta_{gx} - \Delta \theta_{vx}) \quad (2-58)$$

§ 2—3 激光陀螺的模型及误差补偿

激光陀螺是七十年代发展起来的一种全固态装置，被认为是捷联式系统的理想元件。其主要特点是

(1). 没有活动部件（如转子、内外环等），因而坚固、可靠。没有一般高精度陀螺仪要减小摩擦力矩的问题。

(2) 对 g 和 g^2 都不敏感，不会引起加速度误差，可在大加速度环境中工作。

(3). 具有很宽的动态范围（0.001度/小时 $\sim 10^8$ 度/小时），特别适用于捷联式系统。

(4). 能直接提供数字输出，便于与计算机连接。

(5). 具有总成本低的远景，这是由它的长寿命（可存放四年以上）和高可靠性（平均故障间隔时间超过80,000小时）。

激光陀螺的基本工作原理如图 2—15 所示。在一个三角形的环形光路中，放置两个反射镜，一个半透半反射镜，一个气体激光发生器。这个三角形环形光路形成一个光学谐振腔。气体激光器产生方向相反（顺时针方向和逆时针方向）沿环路传播的两束激光。为了使激光产生谐振，光程应是波长的整倍数，即

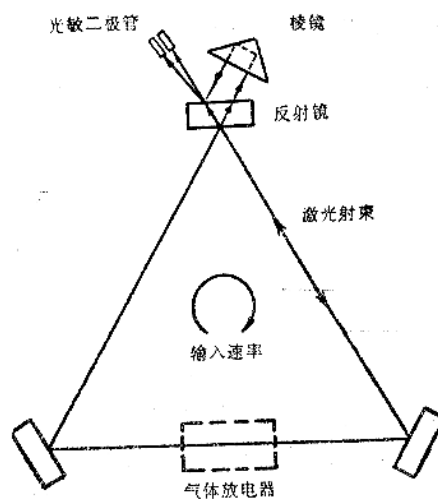


图2—15 激光陀螺原理示意图

$$\lambda = \frac{L}{J}$$

式中 λ ——波长

L ——光程

J ——整数，通常为 $10^5 \sim 10^6$

此时激光的振荡频率为：

$$\nu = J \frac{c}{L}$$

式中 c ——光速。

当激光陀螺绕垂直光路平面的轴转动时，则方向相反的两束激光产生一个光程差。这个光程差使两束激光的振荡频率出现一个相应的差值。

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta L}{L} \quad (2-57)$$

光程差 ΔL 和激光陀螺绕垂直光路平面转动角速度 ω 的关系为：

$$\Delta L = \frac{4A\omega}{c} \quad (2-58)$$

式中 A ——为光路的面积。

把 (2-58) 式代入 (2-57) 式得：

$$\Delta\nu = \frac{4A\omega}{\lambda L} \quad (2-59)$$

(2-59) 式说明，在理想的情况下频率差和角速度成正比。为了测量这个差频信号，通过反射镜和直角稜镜把两个光束引出谐振腔外，使他们入射到光电探测器上，形成明暗相间的干涉图案由光电探测器形成电脉冲。当激光陀螺不转动时，差频 $\Delta\nu=0$ ，干涉条纹不动。当激光陀螺转动时，干涉条纹以 $2\pi\Delta\nu$ 的角频率移动，移动速度与 $\Delta\nu$ 成正比。用可逆计算器累计移过的干涉条纹数（脉冲数）就能精确的测定激光陀螺转过的角度。

一、激光陀螺的模型方程

激光陀螺仪模型方块图如图 2-16 所示，主要考虑以下几项。

1. 起动时标度系数的瞬变过程

激光陀螺的标度系数可以考虑由起动时的瞬态过程加上一个常值标度系数组成。起动时的瞬态过程可以用一个简单的指数函数来描述。即

$$S_{\sigma T} = S_{\sigma T}(0)e^{-t/\tau_s} \quad (2-60)$$

式中 $S_{\sigma T}(0)$ ——初始值。

τ_s ——时间常数。

2. 标度系数和陀螺输入轴的安装误差。

在理想的情况下，陀螺仪的输入轴应和机体轴一致，实际上总有一个小的安装误差角。由三个小安装误差角构成机体坐标系和陀螺坐标系的变换矩阵为：

$$C_{\xi}^{\eta} = I + \Delta C_{\xi}^{\eta}$$

如果把标度系数和安装误差合在一起并用 K_w 表示则有

$$K_w = S_{\sigma} + \Delta C_{\xi}^{\eta} \quad (2-61)$$

$$K_w = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{g1} & -\theta_{yz} & \theta_{xy} \\ \theta_{xz} & S_{g2} & \theta_{zx} \\ -\theta_{xy} & \theta_{yz} & S_{g3} \end{bmatrix}$$

式中 对角线元素 $S_{gi} = S_{gTi} + S_{g0i}$ ($i = 1, 2, 3$)

S_{g0} ——常值标度系数。

S_{gT} ——起动时标度系数瞬态过程。

非对角线元素 θ_{ij} ($i, j = x, y, z$) 为陀螺输入轴的安装误差角。

3. 陀螺偏置

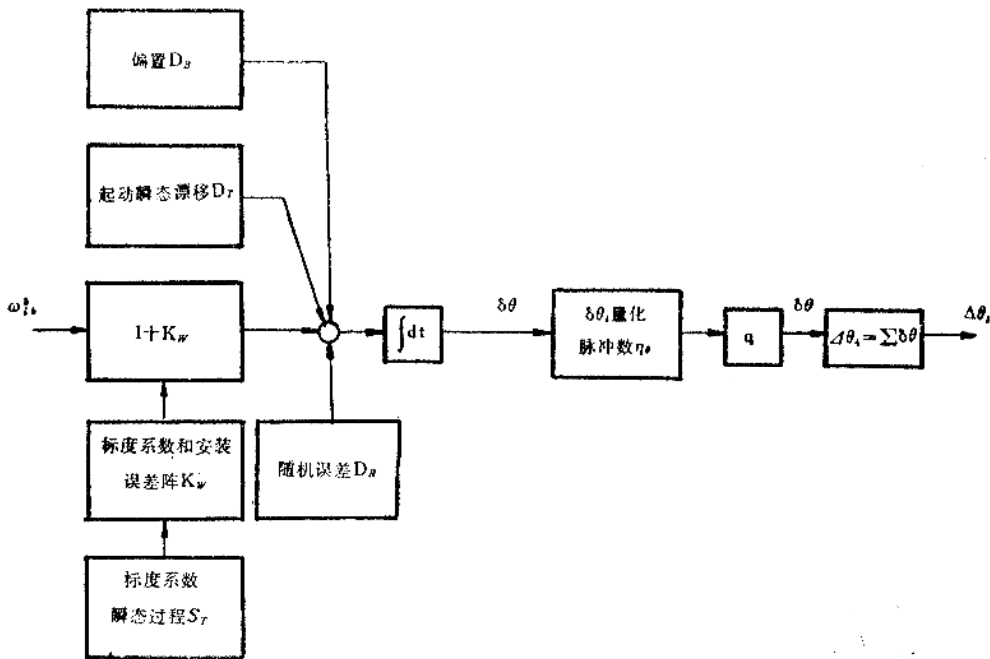


图2—16 激光陀螺模型方块图

用 D_B 表示，是一个常值陀螺漂移。每次起动时会发生变化。

4. 起动时漂移的瞬态过程

起动时漂移的瞬态过程也是用一个简单的指数函数来描述。即

$$D_T = D_T(0)e^{-t/\tau_D} \tag{2—62}$$

式中 $D_T(0)$ ——漂移瞬态的初始幅值

τ_D ——时间常数。

5. 漂移误差 D_R

激光陀螺的漂移误差一般考虑为白噪声，随机游动和随机常数的组合。在模型方块图中我们用 D_R 表示。

激光陀螺总的测量角速度为

$$\tilde{\omega}_b^i = (I + K_w)\omega_b^i + D_B + D_T + D_R \tag{2—63}$$

输出的角增量为

$$\Delta\theta_i = (I + K_w)\Delta\theta_i + \Delta\theta_B + \Delta\theta_T + \Delta\theta_R \quad (2-64)$$

二、激光陀螺的误差补偿

激光陀螺的误差补偿主要考虑陀螺输入轴的安装误差、标度系数误差、陀螺偏置和起动机漂移的瞬变过程。由

$$\tilde{\omega}_{i_b}^b = (I + K_w)\omega_{i_b}^b + D_B + D_T$$

有

$$\begin{aligned} \omega_{i_b}^b &= (I + K_w)^{-1}(\tilde{\omega}_{i_b}^b - D_B - D_T) \\ &\approx (I - K_w)(\tilde{\omega}_{i_b}^b - D_B - D_T) \end{aligned} \quad (2-65)$$

用角增量表示时为

$$\Delta\theta_i = (I - K_w)(\Delta\theta_i - \Delta\theta_B - \Delta\theta_T) \quad (2-66)$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta\theta_B &= D_B \Delta t \\ \Delta\theta_T &= D_T \Delta t \end{aligned}$$

D_T ——按2-62式计算

K_w ——按2-61式计算

误差补偿按(2-66)式进行。方块图如图2-17所示。

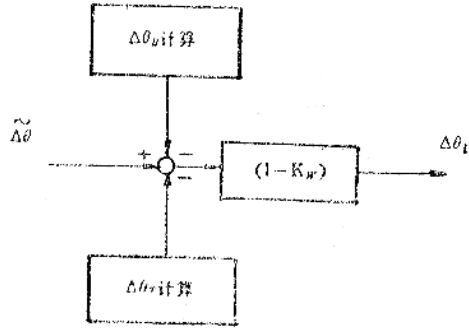


图2-17 激光陀螺误差补偿方块图

§ 2-4 加速度表的模型及误差补偿

在惯性导航系统中得到实际应用的加速度表有很多种，但应用较多的是摆式力反馈的加速度表，有枢轴支承的和挠性支承的。这类加速度表发展历史较久，技术上比较成熟。图2-18是一种浮子摆式导航加速度表的结构图，仪表的主要部件是由枢轴支承的浮子摆、敏感摆偏转的信号传感器和对浮子摆施加力矩的力矩器。信号传感器、电子线路和力矩器构成再平衡回路，使仪表工作在闭环状态。和单自由度浮子陀螺一样，为了减小枢轴上的摩擦力矩，使浮子悬浮在浮液中。浮子重心和浮心（浮子所占据的那部分液体重心）的连线叫摆性轴 p ，浮子的支承轴“ o ”叫输出轴，和 po 垂直的轴即为仪表的输入轴 i ，在仪表没有输入加速度的情况下，和壳体固联的一组 $i o p$ 坐标系称为壳体坐标系。当仪表壳体沿输入轴作加速运动时，由浮子的摆性产生绕仪表输出轴的惯性力矩作用在浮子上，使浮子绕输出轴偏转。信号传感器敏感这个转角输出电的信号，经伺服电子线路的放大、处理、送给力矩器，力矩器产生平衡力矩。由于再平衡回路具有足够高的增益，所以在稳态情况，摆的偏角很小。此时，力矩器的电流与输入加速度（比力）成正例。

一、浮子摆式加速度表动力学

在推导浮子摆式加速度表的动力学方程中时，作两点假设

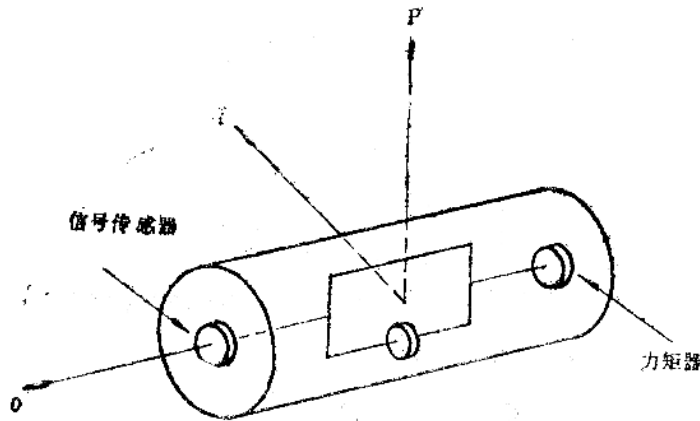


图2-18 浮子摆式加速度表

(1). 浮子组件相对仪表壳体的对准是理想的, 浮子组件相对仪表壳体只能绕输出轴转动。

(2). 浮子组件的惯性积为零。

在上述假设条件下, 对浮子组件应用动量矩定理, 并考虑到惯性力矩, 则有

$$\mathbf{M}_f = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{H}_f \right)_i + m\mathbf{L} \times \mathbf{f} \quad (2-69)$$

式中 \mathbf{M}_f ——绕支承中心 (壳体坐标系 $i o p$ 的坐标原点) 作用在浮子上的外力矩。

\mathbf{H}_f ——浮子组件绕支承中心的角动量。

m ——浮子组件的质量。

\mathbf{L} ——浮子重心的偏移量。

\mathbf{f} ——比力。

根据矢量的相对导数和绝对导数的关系, (2-59) 式可以写作:

$$\mathbf{M}_f = \left(\frac{d}{dt} I \boldsymbol{\omega}_{if} \right)_i + \boldsymbol{\omega}_{if} \times (I \boldsymbol{\omega}_{if}) + m\mathbf{L} \times \mathbf{f} \quad (2-68)$$

式中:

$$I = \begin{bmatrix} I_i & 0 & 0 \\ 0 & I_o & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}$$

是浮子组件的主转动惯量。

$\boldsymbol{\omega}_{if}$ ——是浮子组件相对惯性空间的角速度。

把 (2-60) 式表示在浮子坐标系中, 可以写作

$$\mathbf{M}_f^i = I \dot{\boldsymbol{\omega}}_f^i + \boldsymbol{\omega}_f^i I \boldsymbol{\omega}_f^i + m \mathbf{L}^{iK} \mathbf{f}_i \quad (2-69)$$

式中

$\boldsymbol{\omega}_f^i$ 为 $\boldsymbol{\omega}_f^i$ 的反对称矩阵形式。 \mathbf{L}^{iK} 为 \mathbf{L}^i 的反对称矩阵形式, $\mathbf{L}^i = [0, 0, -L_p]$

故

$$\omega_{iI}^{FK} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_p & \omega_o \\ \omega_p & 0 & -\omega_i \\ -\omega_o & \omega_i & 0 \end{bmatrix} \quad (2-70)$$

$$L^{FK} = \begin{bmatrix} 0 & L_p & 0 \\ -L_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-71)$$

考虑 ω_{iI}^f 为浮子相对壳体的角速度和壳体相对惯性空间的角速度之和, 即:

$$\begin{aligned} \omega_{iI}^f &= \omega_{iI}^c + \omega_{iI}^t \\ &= C_i^f (\omega_{iI}^c + \omega_{iI}^t) \end{aligned}$$

式中

$$\omega_{iI}^c = [\omega_i, \omega_o, \omega_p]^T$$

$$\omega_{iI}^t = [0, \dot{\alpha}_o, 0]^T$$

$$C_i^f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha_o \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_o & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故

$$\omega_{iI}^f = \begin{bmatrix} \omega_i - \alpha_o \omega_p \\ \omega_o + \dot{\alpha}_o \\ \omega_p + \alpha_o \omega_i \end{bmatrix} \quad (2-72)$$

在动力学分析中, 我们先只考虑壳体沿输入轴作加速运动即:

$$f^e = [f, 0, 0]^T$$

故

$$f^f = C_i^f f^e = \begin{bmatrix} f_i \\ 0 \\ \alpha_o a_i \end{bmatrix} \quad (2-73)$$

把 (2-65)、(2-64)、(2-63) 等式代入 (2-61) 中并展开, 则得浮子摆绕输出轴的力矩方程为

$$\begin{aligned} M_o &= I_o \ddot{\alpha}_o + (I_i - I_p) \omega_i \omega_p + \alpha_o (I_i - I_p) (\omega_i^2 - \omega_p^2) \\ &\quad + I_o \dot{\omega}_o - mL_p f \end{aligned} \quad (2-74)$$

式中

$$mL_p = P \quad \text{称作摆性}$$

绕输出轴的外加力矩 M_o 由三部分组成:

- (1). 力矩器产生的电磁力矩 M_{iw}
- (2). 液体的阻尼力矩 $C_o \dot{\alpha}_o$

(3). 干扰力矩 M_d

即 $M_o = M_{i0} - C_o \dot{\alpha}_o + M_d$ (2-75)

把 (2-67) 代入 (2-66) 并稍作处理得

$$\begin{aligned}
 I_o \ddot{\alpha}_o + C_o \dot{\alpha}_o &= P f_i + M_{i0} && \text{理想方程} && (2-76) \\
 &+ (I_p - I_i) \omega_i \omega_p && \text{非等惯性力矩} && \\
 &+ \alpha_o (I_p - I_i) (\omega_i^2 - \omega_p^2) && \text{非等惯性交连} && \\
 &- I_o \dot{\omega}_o && \text{角加速度力矩} && \\
 &+ M_d && \text{干扰力矩} &&
 \end{aligned}$$

加速度表的再平衡回路是按理想方程设计的, 其他项都是误差力矩, 需要加以补偿。和捷联式单自由度陀螺一样, 捷联式加速度表也是直接承受飞行器的角运动, 由于飞行器的角运动将产生很大的动态误差。一个典型的脉冲施矩再平衡回路如图 2-19 所示。表示

$$K = K_{ig} K_e K_{i0}$$

则

$$M_{i0} = -K \alpha_o$$

代入 (2-76) 式, 则得到加速度表的动力学方程为

$$I_o \ddot{\alpha}_o + C_o \dot{\alpha}_o + K \alpha_o = P f_i + M'_d$$
 (2-77)

式中

$$\begin{aligned}
 M'_d &= (I_p - I_i) \omega_i \omega_p - I_o \dot{\omega}_o \\
 &+ \alpha_o (I_p - I_i) (\omega_i^2 - \omega_p^2) + M_d
 \end{aligned}$$

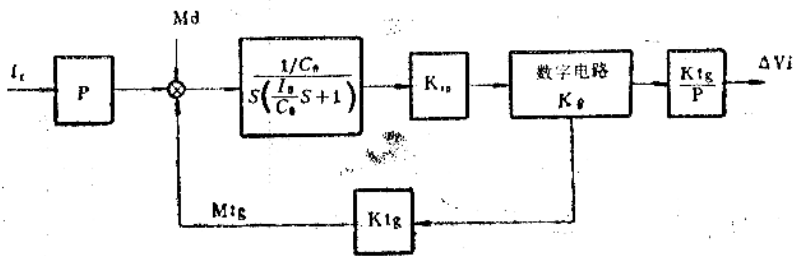


图2-19 加速度表脉冲再平衡回路

考虑到力矩器的标度系数 S_A 和量化器, 脉冲再平衡回路方块图也可以画成图 2-20。

图中, $S_A = 1 + S_{A0} + S_{A1} (\frac{K}{P} \alpha_o)$

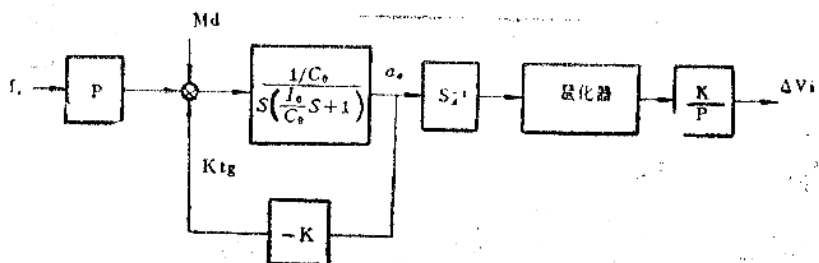


图2-20 再平衡回路方块结构图

二、浮子摆式加速度表的模型方程

浮子摆加速度表的模型如图2—21所示，包括有下列几个部分：

1. 杆臂效应

在理想的情况下，加速度表应安装在飞行器的质量中心处，但实际上由于各种原因这个要求难以实现。加速度表安装的位置总是离开飞行器质量中心一段距离，形成一个杆臂。如图2—22所示。当飞行器绕质心有角运动时，则产生误差。用 l_0 表示加速度表偏离飞行器质心的距离，则加速表所处位置的比力和飞行器质心处的比力有如下关系。

$$f_a^b = f_b^b + \left(\frac{d^2 l_0}{dt^2} \right)_i$$

式中 f_a^b —— 加速表所处位置的比力。

f_b^b —— 飞行器质心处的比力。

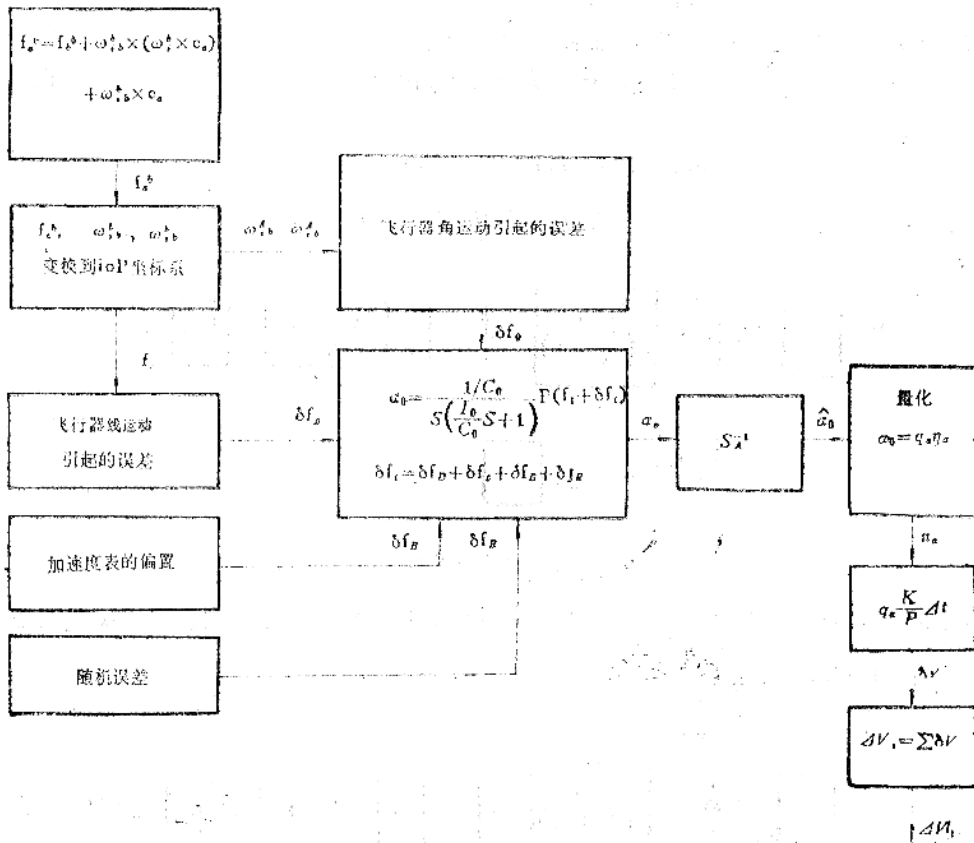


图2—21 浮子摆加速度表模型

$$\frac{d^2 l_0}{dt^2} \Big|_i = \ddot{l}_0 + 2\omega_{i_b}^b \times \dot{l}_0 + \omega_{i_b}^b \times (\omega_{i_b}^b \times l_0) + \omega_{i_b}^b \times l_0$$

考虑 I_0 是常值, 所以 $\ddot{i}_0 + 2\omega_{i_b}^b \times \dot{i}_0 = 0$, 则:

$$f_a^b = f_b^b + \omega_{i_b}^b \times (\omega_{i_b}^b \times I_0) + \dot{\omega}_{i_b}^b \times I_0 \quad (2-78)$$

2. 机体坐标系到仪表坐标系的变换。

考虑加速度表有安装误差, 即仪表的壳体坐标系 $i_0 p$ 和机体坐标系 $x_b y_b z_b$ 之间有偏角, 两个坐标系之间的变换矩阵用 C_b^A 表示, 则飞行器沿机体坐标系轴向的比力 f^b , 角速度 $\omega_{i_b}^b$ 和角加速度 $\dot{\omega}_{i_b}^b$, 都需要变换到加速度表坐标系, 即:

$$\left. \begin{aligned} f^A &= C_b^A f^b \\ \omega_{i_b}^A &= C_b^A \omega_{i_b}^b \\ \dot{\omega}_{i_b}^A &= C_b^A \dot{\omega}_{i_b}^b \end{aligned} \right\} \quad (2-79)$$

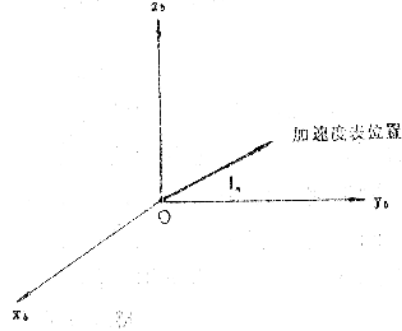


图2-22 杆臂效应几何图

(2-79) 式表示加速度表沿壳体坐标系轴向承受的飞行器的动态环境。

3. 飞行器角运动引起的误差

由飞行器的角运动所产生误差力矩, 从 (2-80) 式可以看出为

$$\begin{aligned} M_D &= (I_p - I_i) \omega_s \omega_p + \alpha_s (I_p - I_i) (\omega_1^2 - \omega_2^2) \\ &\quad - I_0 \dot{\omega}_s \end{aligned} \quad (2-81)$$

式中 α_s 为浮子绕输出轴的转角, 可以从信号传感器的输出中求出, 也可以近似的表示成某种运动量的函数。如果飞行器沿仪表输入轴有加速度运动, 则再平衡回路中力矩器产生的力矩主要是平衡由输入比力产生的力矩, 即

$$K \alpha_s \approx P f_i$$

故

$$\alpha_s \approx \frac{P}{K} f_i \quad (2-82)$$

如果飞行器没有线运动而只有角运动, 即 (2-76) 式中 $P f_i = 0$, 则此时 α_s 完全由误差力矩决定, 在由角运动引起的误差力矩中, 通常认为主要分量是输出轴角加速度引起的误差项, 可以认为力矩器的力矩主要平衡 $I_0 \dot{\omega}_s$ 项。即

$$K \alpha_s \approx I_0 \dot{\omega}_s$$

故

$$\alpha_s \approx \frac{I_0}{K} \dot{\omega}_s \quad (2-83)$$

与 M_D 对应的比力误差用 δf_D 表示, 即

$$\begin{aligned} \delta f_D &= \frac{M_D}{P} \\ &= \frac{1}{P} [(I_p - I_i) \omega_s \omega_p + \alpha_s (I_p - I_i) (\omega_1^2 - \omega_2^2) \\ &\quad - I_0 \dot{\omega}_s] \end{aligned} \quad (2-84)$$

把(2-82)式代入(2-84)得:

$$\delta f_D = \frac{1}{P}(I_p - I_i)\omega_i\omega_p + \frac{1}{K}f_i(I_p - I_i)(\omega_i^2 - \omega_p^2) - \frac{I_o}{P}\omega_o \quad (2-85)$$

把(2-83)式代入(2-84)得

$$\delta f_D' = \frac{1}{P}[(I_p - I_i)\omega_i\omega_p + \frac{I_o}{K}(I_p - I_i)(\omega_i^2 - \omega_p^2)\omega_o - I_o\omega_o] \quad (2-86)$$

4. 飞行器线运动引起的误差

前面我们推导加速度表的动力学方程时,只考虑了飞行器沿仪表输入轴有线加速度(比力),同时考虑浮子是刚体,即不考虑浮子的弹性变形。如果考虑飞行器沿仪表壳体坐标系三个轴向都有线加速度,且考虑浮子的非等弹性,则飞行器的线运动也要引起仪表的误差。由仪表的线运动引起的作用在浮子上的力矩为:

$$\mathbf{M}_f = m(\mathbf{f}^f \times \delta^f) \quad (2-87)$$

对加速度表来说,明显的质量不平衡是仪表工作需要的,如果再考虑浮子和壳体之间的安装误差角,则壳体坐标系和浮子坐标系之间的变换矩阵为:

$$\mathbf{C}_c^f = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_p & -\alpha_o \\ -\alpha_p & 1 & \alpha_i \\ \alpha_o & -\alpha_i & 1 \end{bmatrix}$$

用 f_i, f_o, f_p 表示壳体坐标系轴向的比力则:

$$\mathbf{f}^f = \mathbf{C}_c^f \mathbf{f}^c = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_p & -\alpha_o \\ -\alpha_p & 1 & \alpha_i \\ \alpha_o & -\alpha_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ f_o \\ f_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i + \alpha_p f_o - \alpha_o f_p \\ f_o + \alpha_i f_p - \alpha_p f_i \\ f_p + \alpha_o f_i - \alpha_i f_o \end{bmatrix} \quad (2-88)$$

考虑浮子组件的弹性,则在线加速度作用下浮子产生弹性变形,从而使浮子质心的位置成为比力的函数。此时

$$\delta = -\mathbf{L} + m[\mathbf{K}] \mathbf{f}^f \quad (2-89)$$

式中

$\mathbf{L} = [L_i, L_o, L_p]^T$ 为在无比力作用时浮子摆质心的位置在浮子坐标系中表示的列矢量。

$[\mathbf{K}]$ 为浮子的柔性系数矩阵。

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{io} & K_{ip} \\ K_{oi} & K_{oo} & K_{op} \\ K_{pi} & K_{po} & K_{pp} \end{bmatrix} \quad (2-90)$$

把(2-90)(2-88)代入(2-89),把(2-89)再代入(2-88),略掉二阶微量,并展开得沿输出轴的力矩方程为:

$$M_o = mL_p(f_i + \alpha_p f_o - \alpha_o f_p) - mL_i(f_p + \alpha_o f_i - \alpha_i f_o) \\ m^2[K_{oi}f_i^2 + K_{po}f_i f_o + (K_{pp} - K_{ii})f_p f_i - K_{io}f_o f_p]$$

$$-K_{i_0} f_p^2] \quad (2-91)$$

在(2-91)式中除第一项 $m L_p f_i$ 为希望的输入力矩之外, 其他项都是误差力矩, 其中 α_0 用(2-82)式表示, 则由线运动引起的误差力矩为

$$\begin{aligned} M_e = & (m\delta_p \alpha_p + m\delta_i \alpha_i) f_0 - m\delta_i f_p - m^2 [(K_{p_0} - K_{i_1}) + \frac{\delta_p^2}{K}] f_i f_p \\ & - m^2 (K_{p_1} + \frac{\delta_i \delta_p}{K}) f_i^2 - m^2 K_{p_0} f_i f_0 + m^2 K_{i_0} f_p^2 \\ & + m^2 c_{i_0} f_0 f_p \end{aligned} \quad (2-92)$$

考虑

$$M_e = P \Delta f_{i_0}$$

即

$$\Delta f_{i_0} = \frac{M_e}{P} \quad (2-93)$$

把(2-92)代入(2-93)式得

$$\begin{aligned} \Delta f_{i_0} = & D_0 f_0 + D_p f_p + D_{i_0} f_i f_p + D_{i_1} f_i^2 + D_{i_0} f_i f_0 \\ & + D_{p_0} f_p^2 + D_{o_0} f_0 f_p \end{aligned} \quad (2-94)$$

式中

$$D_0 = \alpha_p + \frac{\delta_i}{\delta_p} \alpha_i$$

$$D_p = -\frac{\delta_i}{\delta_p}$$

$$D_{i_0} = -[\frac{m\delta_p}{K} - \frac{m}{\delta_p} (K_{p_0} - K_{i_1})]$$

$$D_{i_1} = -[\frac{m\delta_i}{K} - \frac{m}{\delta_p} K_{p_1}]$$

$$D_{i_0} = -\frac{m}{\delta_p} K_{p_0}$$

$$D_{p_0} = \frac{m}{\delta_p} K_{i_0}$$

$$D_{o_0} = \frac{m}{\delta_p} K_{i_0}$$

5. 加速度表的偏置

加速度表的偏置用 Δf_{i_0} 表示, 是由作用在浮子上的常值干扰力矩产生的误差。

6. 力矩器的标度系数误差

加速度表的力矩器标度系数误差仍假定由常值项和比例于输入比力的项构成, 对正的和负的输入比力, 标度系数具有不同的值。标度系数可表示为

$$\left. \begin{aligned} S_A &= 1 + S_{A0}(+) + S_{A1}(+) \left(-\frac{K}{P} \alpha_0 \right) & \alpha_0 \geq 0 \\ S_A &= 1 + S_{A0}(-) + S_{A1}(-) \left(-\frac{K}{P} \alpha_0 \right) & \alpha_0 < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-95)$$

式中

$S_{A0}(+)$, $S_{A0}(-)$ ——正向和负向的常值标度系数误差。

$S_{A1}(+)$, $S_{A1}(-)$ ——正向和负向的比例于输入比力的标度系数误差。

在理想的情况下, 标度系数 $S_A = 1$, 此时

$$K \alpha_0 \cong P f_i$$

故

$$\alpha_0 \cong \frac{P}{K} f_i$$

如果力矩器的标度系数 $S_A \neq 1$, 则

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{P}{K S_A} f_i = \alpha_0 S_A^{-1}$$

把 α_0 量化, 用 q_{α_0} 表示量化电平, n_{α_0} 表示脉冲数, 则

$$\alpha_0 = q_{\alpha_0} n_{\alpha_0}$$

由

$$f_i = \frac{K}{P} \alpha_0$$

有

$$\hat{f}_i = \frac{K}{P} q_{\alpha_0} n_{\alpha_0}$$

表示

$$f_i \Delta t = \delta V_i$$

则

$$\delta V_i = \frac{K}{P} q_{\alpha_0} n_{\alpha_0} \Delta t$$

仪表输出为

$$\Delta V_i = \sum \delta V_i$$

除上述六种误差外, 如果考虑到各种随机因素的影响, 仪表输出中也存在着随机误差, 考虑到起动机热扰动的影响等也产生起动机时的瞬态过程误差, 这些误差难以用一般的方法进行补偿所以就不考虑了。

三、浮子摆式加速度表的误差补偿

浮子摆式加速度表误差补偿的方块图如图 2-23 所示。

1. 标度系数误差补偿

用 \hat{f}_i 表示仪表测量的比力, $\hat{f}_i = \frac{K}{P} \hat{\alpha}_0$, f_i 表示真实的比力, δf_i 表示误差项, 则由

$$\hat{\alpha}_0 = S_A^{-1} \alpha_0$$

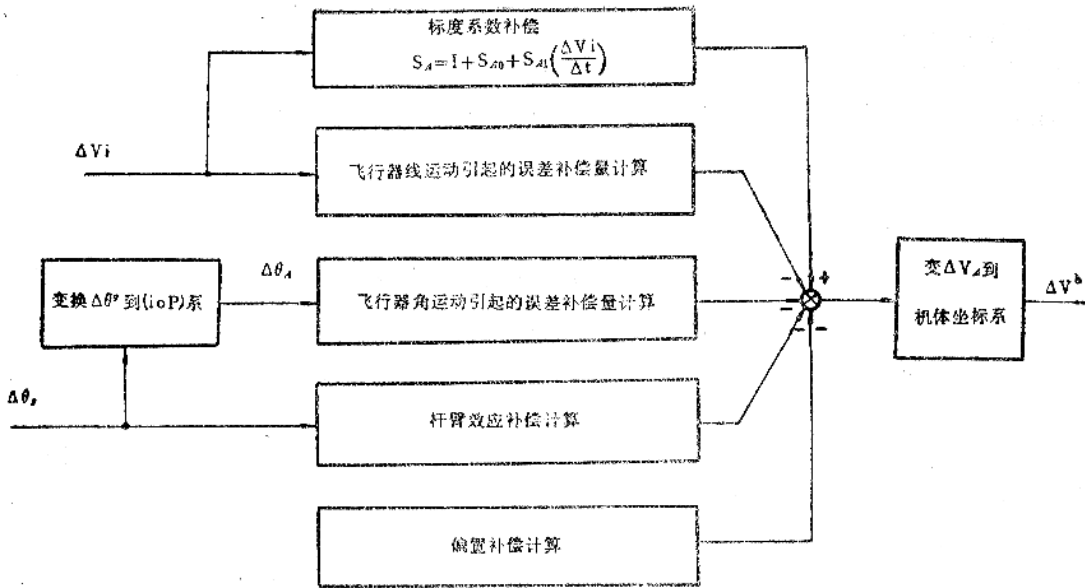


图2—23 浮子摆式加速度表误差补偿方块图

得

$$\vec{f}_i = S_A^{-1}(f_i + \delta f_i)$$

即

$$f_i = S_A \vec{f}_i - \delta f_i$$

用增量表示时得:

$$\Sigma f_i \Delta t = \Sigma S_A \vec{f}_i \Delta t - \Sigma \delta f_i \Delta t$$

即

$$\Delta V_i = S_A \Delta \vec{V}_i - \Sigma \delta f_i \Delta t \quad (2-96)$$

式中 S_A 按下式计算

$$S_A = 1 + S_{A0}(+) + S_{A1}(+) \left(\frac{\Delta \vec{V}_i}{\Delta t} \right) \quad \Delta \vec{V}_i \geq 0$$

$$S_A = 1 + S_{A0}(-) + S_{A1}(-) \frac{\Delta \vec{V}_i}{\Delta t} \quad \Delta \vec{V}_i < 0$$

2. 飞行器角运动引起的误差补偿

飞行器的角运动引起的加速度表误差表达式为(2-85)或(2-86)式,我们按(2-85)式来计算补偿量,补偿量是用捷联式陀螺输出的角增量和捷联加速度表输出的速度增量来计算的,把(2-85)式写成增量的形式即为

$$\begin{aligned} \Delta \vec{V}_D &= \delta f_D \Delta t \\ &= \frac{1}{P}(I_p - I_i) \Delta \theta_i \Delta \theta_p / \Delta t + \frac{\Delta V_i}{K} (I_p - I_i) (\Delta \theta_i^2 - \Delta \theta_p^2) / \Delta t^2 \\ &\quad - \frac{I_o}{K} [\Delta \theta_o(n+1) - \Delta \theta_o(n)] / \Delta t \end{aligned} \quad (2-97)$$

3. 飞行器线运动引起的误差补偿

飞行器的线运动引起的误差表达式为(2—94)式。式中 D_a 、 D_p 等各项误差系数，可以利用仪表参数计算出来，也可以通过实验进行测定。在实际工作中，都是通过实验进行测定，而且都认为是常值。误差表达式用增量表示时，为

$$\begin{aligned} \Delta V_a &= \Delta f_{ia} \Delta t \\ &= D_a \Delta V_a + D_p \Delta V_p + D_{ip} \Delta V_i \Delta V_p / \Delta t + D_{ii} \Delta V_i^2 / \Delta t \\ &\quad + D_{io} \Delta V_i \Delta V_o / \Delta t + D_{pp} \Delta V_p^2 / \Delta t + D_{op} \Delta V_o \Delta V_p / \Delta t \end{aligned} \quad (2-98)$$

利用捷联式加速度表输出的角增量按(2—89)式计算补偿量。

4. 加速度表偏置的补偿

加速度表的偏置是一个常值比力误差 Δf_B ，其增量形式为

$$\Delta V_B = \Delta f_B \Delta t \quad (2-99)$$

按(2—90)式可计算偏置的补偿量。

5. 杆臂效应的补偿

当加速度表的安装位置偏离飞行器质心时，则飞行器的角运动会在加速度表的输出中产生误差。(2—78)式为加速度表所处位置的加速度(比力)和飞行器质心的加速度(比力)的关系。即

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^b &= \mathbf{f}_o^b + \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \mathbf{l}_o) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \mathbf{l}_o \\ &= \mathbf{f}_o^b + \Delta \mathbf{f}_i \end{aligned} \quad (2-78)$$

式中误差项为

$$\Delta \mathbf{f}_i = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \mathbf{l}_o) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \mathbf{l}_o \quad (2-100)$$

用增量表示时为

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{V}_i &= \Delta \mathbf{f}_i \Delta t \\ &= [\Delta \boldsymbol{\theta} \times (\Delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{l}_o) + \Delta^2 \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{l}_o] / \Delta t \end{aligned} \quad (2-101)$$

式中 $\Delta \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}_{ib} \Delta t$ 为陀螺输出角增量。

$$\Delta^2 \boldsymbol{\theta} = \Delta \boldsymbol{\theta}(n+1) - \Delta \boldsymbol{\theta}(n)$$

考虑了上述五种补偿时，总的补偿计算为

$$\Delta V = S_A(\Delta \tilde{V}) - (\Delta V_D + \Delta V_a + \Delta V_B + \Delta V_o) \quad (2-102)$$

考虑仪表的安装误差时，则经过误差补偿之后的 ΔV 再从仪表坐标系变换到机体坐标系即

$$\Delta \mathbf{V}^b = \mathbf{C}_i^b \Delta \mathbf{V}^o$$

第三章 捷联式惯导的基本算法

§ 3—1 捷联式惯导算法概述

捷联式惯性导航系统是一个信息处理系统，就是把机体安装的惯性仪表所测量的飞行器运动信息，经过计算机处理成所需要的导航和控制信息。所谓“捷联式惯导的算法”就是指从惯性仪表的输出到给出需要的导航和控制信息所必需进行的全部计算问题的计算方法。计算的内容和要求，根据捷联式惯导的应用和功能要求的不同而有很大的差别。但一般说来，捷联式惯导的基本算法有如下的内容：

一)、系统的起动和自检测。系统起动之后，各个部份的工作是否正常，要通过自检测程序加以检测，其中包括电源、惯性仪表、计算机以及计算机软件。通过自检测，发现有不正常，则发出告警信息。系统的自检测是保证系统进入导航状态后能正常工作，提高系统可靠性的措施。

二)、系统的初始化。系统的初始化包括三项任务：

1. 给定飞行器的初始位置和初始速度等初始信息。

2. 导航平台的初始对准，在平台式惯导中，平台的初始对准就是使平台坐标系和导航坐标系相一致，是用物理的方法来实现的。在捷联式惯导系统中，初始对准则是确定姿态矩阵的初始值，是在计算机中用对准程序来完成的。在物理概念上也可以说是把“数学平台”的平台坐标系和导航坐标系的轴向对准。有关初始对准的问题在第七章详细讨论。

3. 惯性仪表的校准，对陀螺的标度系数进行测定，对陀螺的漂移进行测定并补偿，对加速度计也同样测定标度系数并存入计算机。初始过程中对惯性仪表的校准是提高系统精度的重要保证。

三)、惯性仪表的误差补偿，对捷联式惯导系统来说，由于惯性仪表直接安装在机体上，因此飞行器的线运动和角运动都引起较大的误差，为了保证系统的精度，必须对惯性仪表的误差进行补偿，最好的补偿方法是计算机补偿。在计算机中通过专用的软件来实现误差补偿。

四)、姿态矩阵的计算，姿态矩阵的计算是捷联式惯导算法中最重要的一部份，也是捷联式系统所特有的。不管捷联式惯导应用和功能要求如何，姿态矩阵的计算都是必不可少的。姿态矩阵的算法是本章重点讨论的内容。

五)、导航计算，导航计算就是把加速度计的输出信息变换到导航坐标系，然后计算飞行器速度、位置等导航信息。有关导航计算的问题，我们在第四章介绍。

六)、制导和控制信息的提取，飞行器的姿态信息既用来显示也是控制系统最基本的控制信息。此外，飞行的角速度和线加速度信息也都是控制飞行器所需要的信息。这些信息可以从姿态矩阵的元素和陀螺加速度计的输出中提取出来，这些控制信息的提取，我们在第四节讨论。

捷联式惯导系统算法流程图见图 3—1。

§ 3—2 姿态矩阵的计算

185

在捷联式惯导中，飞行器地理位置就是地理坐标系相对地球坐标系的方位。而飞行器的姿态和航向则是机体坐标系相对地理坐标系的方位关系。确定两个坐标系之间的方位关系问题，是力学中的刚体定点转动理论。在刚体定点转动理论中，描述动坐标系相对参考坐标系方位关系的方法有多种，我们可以简单的把它们分作三类，即：三参数法、四参数法、和九参数法。三参数法也叫欧拉角法，是欧拉在1776年提出的。四参数法有两种，一种是四元数法，是哈密顿(Hamilton)首先提出的，开始在数学中引入四元数，以后用在刚体定位问题。另一种叫凯里—克莱茵(Cayley—Klein)参数法，是在1897年提出来的。九参数法是基于方向余弦的概念，所以也叫作方向余弦法。此外，还可以用动坐标系相对参考坐标转动的等效转轴和转角来描述刚体的定点转动，这种方法叫作等效转动矢量法，矢量的方向表示等效转轴的方向，矢量的大小，表示转角的大小。

姿态矩阵和位置矩阵，都可以用上述参数来描述；这一节我们主要针对姿态矩阵来讨论它的算法，主要介绍欧拉角法、方向余弦法、四元数法和等效转动矢量法。

一、欧拉角法

一个动坐标系相对参考坐标系的方位，可以完全由动坐标系依次绕三个不同的轴转动的三个转角来确定。如把 x_b, y_b, z_b 作为动坐标系， NED 作为参考坐标，则航向角 ψ 、俯仰角 θ 、倾斜角 γ (见图 3—2)

(图中 X, Y, Z_r 为 NED α 为 ψ ， β 为 θ ， γ 为 γ)

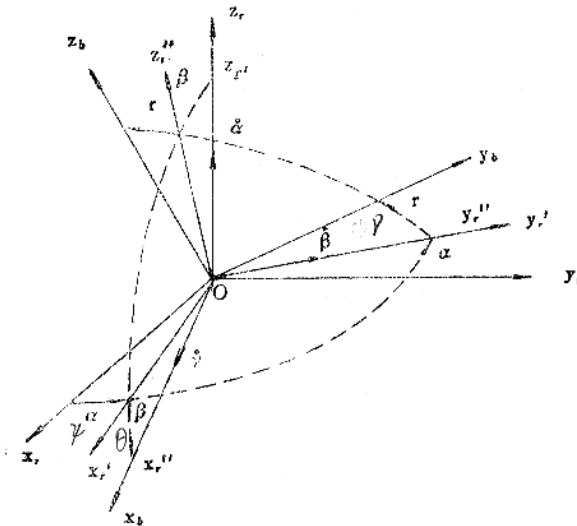


图3—2 欧拉角组

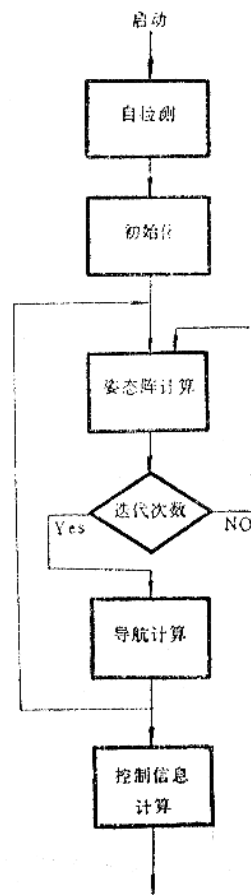


图3—1 捷联式惯导系统算法流程图

就是一组欧拉角。欧拉角没有严格的定义，根据需要，可以选用不同的欧拉角组。第一次转动，可以绕三个轴中的任一个转动，故有三种可能性，第二次转动，则可以绕其他两根轴中的任一个转动，所以又有两种可能性，第三次转动，又可以绕另外两根轴中的任一个转动，又有两种可能性。因此，总的可供选择的欧拉角组共有

$$N = 3 \times 2 \times 2 = 12 \text{种}$$

1. 用欧拉角表示的姿态矩阵

在初始时，假定 $x_{b_0}y_{b_0}z_{b_0}$ 和 NED 重合，第一次转动是 $x_{b_0}y_{b_0}z_{b_0}$ 绕 z_{b_0} 轴转动 ψ 角， ψ 角即为飞行器的航向角。此时 $x_{b_0}y_{b_0}z_{b_0}$ 转到 $x'_b y'_b z'_b$ 的位置， $x'_b y'_b z'_b$ 和 NED 之间的变换关系为

$$\begin{pmatrix} x'_b \\ y'_b \\ z'_b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C_\psi} \begin{pmatrix} N \\ E \\ D \end{pmatrix}$$

第二次转动，是 $x'_b y'_b z'_b$ 绕 y'_b (即飞行器的水平横轴) 转 θ 角， θ 角为飞行器的俯仰角，则 $x'_b y'_b z'_b$ 转到 $x''_b y''_b z''_b$ 的位置，此时 $x'_b y'_b z'_b$ 和 $x''_b y''_b z''_b$ 之间的变换关系为

$$\begin{pmatrix} x''_b \\ y''_b \\ z''_b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}}_{C_\theta} \begin{pmatrix} x'_b \\ y'_b \\ z'_b \end{pmatrix}$$

第三次转动，是 $x''_b y''_b z''_b$ 绕 x''_b 转动 γ 角， γ 角即飞行器的倾斜角，此时 $x''_b y''_b z''_b$ 转动到 $x_b y_b z_b$ 的位置， $x''_b y''_b z''_b$ 和 $x_b y_b z_b$ 之间的变换关系为

$$\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}}_{C_\gamma} \begin{pmatrix} x''_b \\ y''_b \\ z''_b \end{pmatrix}$$

从地理坐标系到机体坐标系之间的变换矩阵，即姿态矩阵 C_n^b 为

$$\begin{aligned} C_n^b &= C_\gamma C_\theta C_\psi \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta & \sin\psi\cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\psi\sin\theta\sin\gamma & \sin\psi\sin\theta\sin\gamma & \cos\theta\sin\gamma \\ -\sin\psi\cos\gamma & +\cos\psi\cos\gamma & \\ \cos\psi\sin\theta\cos\gamma & \sin\psi\sin\theta\cos\gamma & \cos\theta\cos\gamma \\ +\sin\psi\sin\gamma & -\cos\psi\sin\gamma & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

即姿态矩阵(1-5)式。它是由三次转动的变换矩阵连乘得到的，这是常用的方法，但是不太直观而且推导过程较繁。皮欧(Richard L. Pio)在1964年提出了类似信号流图的方法进行坐标变换，叫作符号法，可以直接写出固定矢量的坐标变换关系。图3-2的坐标系方位关

系, 按皮欧的符号法可以表示成图 3—3 的关系, NED 轴上的分量作为输入, $x_b y_b z_b$ 轴上的

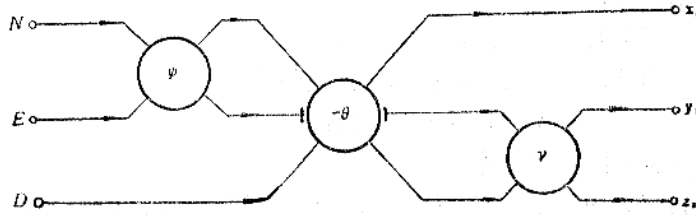


图 3—3 符号法变换图

分量作为输出, 则按皮欧符号法的规则, 可以直接写出固定矢量坐标变换的关系。

$$x_b = N \cos \psi \cos \theta + E \sin \psi \cos \theta - D \sin \theta$$

$$y_b = N (\cos \psi \sin \theta \sin \gamma - \sin \psi \cos \gamma)$$

$$+ E (\cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin \theta \sin \gamma) + D \cos \theta \sin \gamma$$

$$z_b = N (\cos \psi \sin \theta \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma)$$

$$+ E (\sin \psi \sin \theta \cos \gamma - \cos \psi \sin \gamma) + D \cos \theta \cos \gamma$$

写成矩阵的形式即:

$$[x_b \ y_b \ z_b]^T = \mathbf{C}_n^b [N \ E \ D]^T$$

式中 上标 “T” 表示矩阵的转置。

2. 欧拉角微分方程

我们用 ω_{nb}^b 表示机体坐标系相对地理坐标系的角速度矢量在机体坐标系轴向的分量构成的列矩阵, 则从图 3—2 可以看出 ω_{nb}^b 和 ψ, θ, γ 的关系

$$\begin{matrix} \dot{\gamma} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} - \dot{\psi} \cos \theta \sin \gamma \\ \dot{\psi} - \dot{\psi} \cos \theta \cos \gamma \end{matrix} \begin{bmatrix} \omega_{nb}^{bx} \\ \omega_{nb}^{by} \\ \omega_{nb}^{bz} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_\psi \mathbf{C}_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{C}_\gamma \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

展开合并可得

$$\begin{bmatrix} \omega_{nb}^{bx} \\ \omega_{nb}^{by} \\ \omega_{nb}^{bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \cos \theta \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \cos \theta \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_{nb}^{bx} \\ \omega_{nb}^{by} \\ \omega_{nb}^{bz} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \gamma \sin \theta & \cos \gamma \sin \theta \\ 0 & \cos \theta \cos \gamma & -\sin \gamma \cos \theta \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{nb}^{bx} \\ \omega_{nb}^{by} \\ \omega_{nb}^{bz} \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

(3—2)式即为欧拉角微分方程，求解这个微分方程就可以得到三个欧拉角，也就是航向和姿态角，利用航向角、姿态角和姿态矩阵元素之间的关系即可以得到姿态矩阵 C_n^b 。

3. 欧拉角法应用中的问题

应用欧拉角法通过求解微分方程可以直接得到飞行器的航向和姿态角，而且用欧拉角法得到的姿态矩阵永远是正交阵，用这个矩阵进行加速度信息的坐标变换时，变换后的信息中不存在非正交误差。因此，用欧拉角法得到的姿态矩阵无需进行正交化处理。但是，欧拉角微分方程中包含着三角函数的运算，这给实时计算带来一定的困难，而且当 $\theta=90$ 度时，方程式出现“奇点”，使计算机溢出。这种方程式的退化现象，相应于平台式系统中导航平台的锁定。因此，这种方法不能用在全姿态飞行器上，在六十年代初期，这种方法曾用在火箭捷联式惯性制导系统中，计算是采用专用的数字微分分析器(DDA)。

二、方向余弦法

1. 用方向余弦表示的姿态矩阵

方向余弦法是用矢量的方向余弦来表示姿态矩阵的方法。用 i_n, j_n, k_n 表示沿地理坐标系轴向上的单位矢量；用 i_b, j_b, k_b 表示沿机体坐标系轴向上的单位矢量。 i_b 在地理坐标系内的方位可以完全由 i_b 的三个方向余弦来确定，其表达式为

$$i_b = (i_b \cdot i_n)i_n + (i_b \cdot j_n)j_n + (i_b \cdot k_n)k_n$$

同样的情况有

$$j_b = (j_b \cdot i_n)i_n + (j_b \cdot j_n)j_n + (j_b \cdot k_n)k_n$$

$$k_b = (k_b \cdot i_n)i_n + (k_b \cdot j_n)j_n + (k_b \cdot k_n)k_n$$

写成矩阵的形式为

$$\begin{pmatrix} i_b \\ j_b \\ k_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_b \cdot i_n & i_b \cdot j_n & i_b \cdot k_n \\ j_b \cdot i_n & j_b \cdot j_n & j_b \cdot k_n \\ k_b \cdot i_n & k_b \cdot j_n & k_b \cdot k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_n \\ j_n \\ k_n \end{pmatrix}$$

$$C_n^b = \begin{pmatrix} i_b \cdot i_n & i_b \cdot j_n & i_b \cdot k_n \\ j_b \cdot i_n & j_b \cdot j_n & j_b \cdot k_n \\ k_b \cdot i_n & k_b \cdot j_n & k_b \cdot k_n \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

$$= \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

式(3—3)即用方向余弦表示的姿态矩阵，显然，(3—3)式和(1—5)式相等。矩阵相等就是它们的对应元素相等。

2. 矢量的坐标变换

在惯性导航系统的计算中，经常碰到矢量的坐标变换问题，矢量的坐标变换有两种情

况，一种是固定矢量的坐标变换，一种是旋转矢量的坐标变换，在进行矢量的坐标变换时，要注意区分这两种不同的情况。

固定矢量的坐标变换，是一个在空间大小和方向都不变的矢量在两个不同方位的坐标系轴向分量之间的变换关系。也就是同一个矢量在两个不同的坐标系轴向投影之间的变换关系。如一个矢量 \mathbf{r} 写成在机体坐标系轴向的分量形式为

$$\mathbf{r} = x_b i_b + y_b j_b + z_b k_b$$

同一个矢量 \mathbf{r} ，如果写成在地理坐标系轴向分量的形式则为：

$$\mathbf{r} = x_n i_n + y_n j_n + z_n k_n$$

我们表示：

$$\mathbf{r}^b = [x_b, y_b, z_b]^T \quad \mathbf{b} = [i_b, j_b, k_b]^T$$

$$\text{则} \quad \mathbf{r}^n = [x_n, y_n, z_n]^T \quad \mathbf{n} = [i_n, j_n, k_n]^T$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x_b i_b + y_b j_b + z_b k_b \\ &= [x_b \ y_b \ z_b] [i_b \ j_b \ k_b]^T \\ &= \mathbf{r}^{bT} \mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x_n i_n + y_n j_n + z_n k_n \\ &= [x_n \ y_n \ z_n] [i_n \ j_n \ k_n]^T \\ &= \mathbf{r}^{nT} \mathbf{n} \end{aligned}$$

由于 \mathbf{r} 是同一个矢量，故

$$\mathbf{r}^{bT} \mathbf{b} = \mathbf{r}^{nT} \mathbf{n}$$

由(3-3)式 $\mathbf{b} = \mathbf{C}_n^b \mathbf{n}$,

代入上式得

$$\mathbf{r}^{bT} \mathbf{C}_n^b \mathbf{n} = \mathbf{r}^{nT} \mathbf{n}$$

等式两边消去 \mathbf{n} 并转置得

$$\mathbf{r}^n = (\mathbf{C}_n^b)^T \mathbf{r}^b$$

考虑 \mathbf{C}_n^b 是正交阵即 $(\mathbf{C}_n^b)^T = (\mathbf{C}_n^b)^{-1} = \mathbf{C}_b^n$ ，故

$$\text{反变换} \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{r}^n &= \mathbf{C}_b^n \mathbf{r}^b \\ \mathbf{r}^b &= \mathbf{C}_n^b \mathbf{r}^n \end{aligned} \right\} \quad (3-4)$$

(3-4) 式即为固定矢量的坐标变换关系。

旋转矢量的坐标变换，是指一个矢量大小不变，但在方向上转动了一个位置，这个矢量转动前和转动后在同一个坐标系轴向分量之间的变换关系。我们用 \mathbf{r} 表示转动前的矢量，用 \mathbf{r}' 表示转动后的矢量，为了便于说明问题，我们假定有一个动坐标系和矢量固连，在矢量转动前，取动坐标系 b 和参考坐标系 n 重合，则：

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^{nT} \mathbf{n}$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'^{bT} \mathbf{b}$$

由于动坐标随同矢量转动，故 $\mathbf{r}'^{bT} = \mathbf{r}^{nT}$ ，考虑到 $\mathbf{b} = \mathbf{C}_n^b \mathbf{n}$ ，故

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}^{nT} \mathbf{C}_n^b \mathbf{n}$$

如果我们用 \mathbf{r}'^n 表示转动后的矢量在参考坐标系轴向的分量构成的矩阵，则：

$$\mathbf{r}^b = \mathbf{r}^{nT} \mathbf{n} = \mathbf{r}^{nT} \mathbf{C}_n^b \mathbf{n}$$

即

$$\mathbf{r}^{nT} = \mathbf{r}^{nT} \mathbf{C}_n^b$$

两边转置得

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{nT} &= (\mathbf{C}_n^b)^T \mathbf{r}^n \\ &= \mathbf{C}_n^b \mathbf{r}^n \end{aligned} \quad (3-5)$$

(3—5)式即为旋转矢量的坐标变换式, 和(3—4)式的第二式相比, 变换矩阵互逆, 这是由于坐标系不动而是矢量转动, 它相应于矢量固定时坐标系反向转动。由于固定矢量的坐标变换和旋转矢量的坐标不同, 所以在进行坐标变换时, 必需区别这两种不同的情况。

3. 方向余弦矩阵微分方程

由矢量相对导数和绝对导数的关系式

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_N = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_b + \boldsymbol{\omega}_{bn} \times \mathbf{r}$$

我们假定以地理坐标系 N 为参考坐标系, 作为参考坐标系可以认为它在空间是不动的,

即 $\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_N = 0$, 故有

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_b = -\boldsymbol{\omega}_{nb} \times \mathbf{r}$$

把这个式子在机体坐标系内表示, 并写成矩阵的形式, 即为

$$\dot{\mathbf{r}}^b = -[\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times] \mathbf{r}^b \quad (3-6)$$

式中

$$[\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times] = \boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{nbz} & \omega_{nby} \\ \omega_{nbz} & 0 & -\omega_{nbx} \\ -\omega_{nby} & \omega_{nbx} & 0 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

(3—7)式是机体坐标系相对地理坐标系的转动角速度在机体坐标轴向的分量的反对称矩阵形式, 我们用符号 $[\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times]$ 或 $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times$ 表示。

另外, 从固定矢量的坐标变换关系(3—4)式有

$$\mathbf{r}^b = \mathbf{C}_n^b \mathbf{r}^n$$

两边求导

$$\dot{\mathbf{r}}^b = \dot{\mathbf{C}}_n^b \mathbf{r}^n + \mathbf{C}_n^b \dot{\mathbf{r}}^n$$

考虑 $\dot{\mathbf{r}}^n = 0$, 故

$$\dot{\mathbf{r}}^b = \dot{\mathbf{C}}_n^b \mathbf{r}^n = \dot{\mathbf{C}}_n^b \mathbf{C}_b^n \mathbf{r}^b$$

和(3—6)式比较得

$$-\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times \mathbf{r}^b = \dot{\mathbf{C}}_n^b \mathbf{C}_b^n \mathbf{r}^b$$

两边各后乘以 \mathbf{C}_n^b , 则得

$$\dot{\mathbf{C}}_n^b = -\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times \mathbf{C}_n^b \quad (3-8)$$

等式两边求逆, 考虑到 \mathbf{C}_n^b 为正交阵, $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times$ 为反对称阵, 有

$$(\mathbf{C}_n^b)^{-1} = (\mathbf{C}_n^b)^T = \mathbf{C}_n^b$$

$$(\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times)^{-1} = (\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times)^T = -\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times$$

故(3—8)式变为

$$\dot{\mathbf{C}}_b^i = \mathbf{C}_b^i \boldsymbol{\omega}_n^{b,i} \quad (3-9)$$

(3—8)、(3—9)式中的角速度都是用在机体坐标系内的分量表示的，如果用角速度在地理坐标系轴向的分量表示时，则可用角速度反对称矩阵的相似变换来得到。

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_n^{b,i} &= \mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\omega}_n^{n,i} \mathbf{C}_b^n \\ \boldsymbol{\omega}_n^{n,i} &= \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\omega}_n^{b,i} \mathbf{C}_n^b \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

把(3—10)中的第一式代入(3—8)和(3—9)中则得到

$$\dot{\mathbf{C}}_n^i = -\mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\omega}_n^{n,i} \quad (3-11)$$

$$\dot{\mathbf{C}}_b^i = \boldsymbol{\omega}_n^{n,i} \mathbf{C}_b^n \quad (3-12)$$

(3—8)、(3—9)、(3—11)、(3—12)即为常用的姿态矩阵微分方程的四种形式。在捷联式惯导系统中，由于陀螺是固联于机体上的，所以直接测量的角速度是机体坐标系轴向的分量，所以，在姿态计算时用(3—9)式最方便。陀螺仪测量的是飞行器相对惯性空间的角速度 $\boldsymbol{\omega}_i^b$ ，而(3—9)式中需要的则是 $\boldsymbol{\omega}_n^{b,i}$ ，两者的关系为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_n^{b,i} &= \boldsymbol{\omega}_i^b - \boldsymbol{\omega}_i^n \\ &= \boldsymbol{\omega}_i^b - \mathbf{C}_n^i \boldsymbol{\omega}_n^{n,i} \mathbf{C}_i^n \end{aligned} \quad (3-13)$$

代入(3—9)式

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_n^i &= \mathbf{C}_b^i (\boldsymbol{\omega}_i^b - \boldsymbol{\omega}_i^n) \\ &= \mathbf{C}_b^i \boldsymbol{\omega}_i^b - \boldsymbol{\omega}_i^n \mathbf{C}_b^i \end{aligned} \quad (3-14)$$

$\boldsymbol{\omega}_i^b$ 中包括飞行器的姿态和航向的变化角速度，数值较大（可达 $400^\circ/\text{秒}$ ），而 $\boldsymbol{\omega}_i^n$ 则是地球角速度和飞行器的位移运动相对地心形成的角速度，这个角速度比较小，一般为每小时几十度。因此，在实时计算方程式(3—14)时，第一项需要用较高的速度计算，用迭代算法时，迭代频率要高，而第二项则可以用较低迭代频率计算。可以看作是对第一项的修正。

4. 矩阵微分方程的解

我们考虑(3—9)式，为了书写方便，我们暂时把表示坐标系的上下标略去，则(3—9)式写作

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \boldsymbol{\omega}^K$$

这是一个变系数的齐次微分方程，这个方程可用毕卡(Peano—Baker)逼近法求解，积分上式则有

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}(0) + \int_0^t \mathbf{C}(t) \boldsymbol{\omega}^k(t) dt$$

把等式右边的表达式逐次代入积分号内，第一次代入得

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t) &= \mathbf{C}(0) + \int_0^t [\mathbf{C}(0) + \int_0^t \mathbf{C}(t) \boldsymbol{\omega}^k(t) dt] \boldsymbol{\omega}^k(t) dt \\ &= \mathbf{C}(0) + \mathbf{C}(0) \int_0^t \boldsymbol{\omega}^k(t) dt + \int_0^t \int_0^t \mathbf{C}(t) \boldsymbol{\omega}^k(t) dt \boldsymbol{\omega}^k(t) dt \end{aligned}$$

第二次代入得

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}(0) + \mathbf{C}(0) \int_0^t \boldsymbol{\omega}^k(t) dt + \mathbf{C}(0) \int_0^t \int_0^t \boldsymbol{\omega}^k(t) dt \boldsymbol{\omega}^k(t) dt$$

$$+ \int_0^t \int_0^t \int_0^t \mathbf{C}(t) \omega^k(t) dt \omega^k(t) dt \omega^k(t) dt$$

这样不断的进行代入，便得到

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t) = & \mathbf{C}(0) \left[I + \int_0^t \omega^k(t) dt + \int_0^t \int_0^t \omega^k(t) dt \omega^k(t) dt \right. \\ & \left. + \int_0^t \int_0^t \int_0^t \omega^k(t) dt \omega^k(t) dt \omega^k(t) dt + \dots \right] \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^t \omega^k(t) dt \omega^k(t) dt &= \int_0^t \left[\int_0^t \omega^k(t) dt \right] d \left[\int_0^t \omega^k(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^t \omega^k(t) dt \right)^2 \end{aligned}$$

$$\int_0^t \int_0^t \int_0^t \omega^k(t) dt \omega^k(t) dt \omega^k(t) dt = \frac{1}{6} \left(\int_0^t \omega^k(t) dt \right)^3$$

故

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t) &= \mathbf{C}(0) \left\{ I + \int_0^t \omega^k(t) dt + \frac{1}{2} \left[\int_0^t \omega^k(t) dt \right]^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{6} \left[\int_0^t \omega^k(t) dt \right]^3 + \dots \right\} \\ &= \mathbf{C}(0) e^{\int_0^t \omega^k(t) dt} \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{C}_b^a(t) = \mathbf{C}(0) e^{\int_0^t \omega_{n \ b}^k(t) dt} \quad (3-15)$$

或写作

$$\mathbf{C}_b^a(t + \Delta t) = \mathbf{C}(t) e^{\int_t^{t+\Delta t} \omega_{n \ b}^k(t) dt}$$

表示

$$\int_t^{t+\Delta t} \omega_{n \ b}^k(t) dt = \Delta \theta_{n \ b}^k \quad (\text{前项解})$$

则

$$\mathbf{C}_b^a(t + \Delta t) = \mathbf{C}(t) e^{\Delta \theta_{n \ b}^k} \quad (3-16)$$

式中

$$\Delta \theta_{n \ b}^k = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta \theta_{n \ bz}^k & \Delta \theta_{n \ by}^k \\ \Delta \theta_{n \ bz}^k & 0 & -\Delta \theta_{n \ bx}^k \\ -\Delta \theta_{n \ by}^k & \Delta \theta_{n \ bx}^k & 0 \end{bmatrix}$$

(3-16)式中的 $e^{\Delta \theta_{n \ b}^k}$ 可以写成如下的形式：

$$e^{\Delta \theta_{n \ b}^k} = K_1 I + K_2 \Delta \theta_{n \ b}^k + K_3 (\Delta \theta_{n \ b}^k)^2 \quad (3-17)$$

式中 I ——单位阵。

K_1, K_2, K_3 ——系数。

如果知道了 K_1, K_2, K_3 三个系数, 则矩阵指数函数就可以表示成一个矩阵二次方程。下面我们来求三个系数。由矩阵 $\Delta\theta_{n \times n}^b$ 的特微方程来求它的特微值。

$$\det(\lambda I - \Delta\theta_{n \times n}^b) = \begin{vmatrix} \lambda & -\Delta\theta_{n \times n}^{bz} & \Delta\theta_{n \times n}^{by} \\ \Delta\theta_{n \times n}^{bx} & \lambda & -\Delta\theta_{n \times n}^{bz} \\ -\Delta\theta_{n \times n}^{by} & \Delta\theta_{n \times n}^{bx} & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

得

$$\begin{aligned} & \lambda^3 + \Delta\theta_{n \times n}^{bz} \Delta\theta_{n \times n}^{bx} \Delta\theta_{n \times n}^{by} - \Delta\theta_{n \times n}^{by} \Delta\theta_{n \times n}^{bx} \Delta\theta_{n \times n}^{bz} + (\Delta\theta_{n \times n}^{by})^2 \lambda \\ & + (\Delta\theta_{n \times n}^{bx})^2 \lambda + (\Delta\theta_{n \times n}^{bz})^2 \lambda \\ & = \lambda^3 + [(\Delta\theta_{n \times n}^{bx})^2 + (\Delta\theta_{n \times n}^{by})^2 + (\Delta\theta_{n \times n}^{bz})^2] \lambda = 0 \end{aligned}$$

表示

$$(\Delta\theta_{n \times n}^{bx})^2 + (\Delta\theta_{n \times n}^{by})^2 + (\Delta\theta_{n \times n}^{bz})^2 = \Delta\theta_0^2$$

则故

$$\lambda^3 + \Delta\theta_0^2 \lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = \pm j \Delta\theta_0 \quad j = \sqrt{-1}$$

把 $\Delta\theta_{n \times n}^b$ 的特微值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 代入(3—17)式则得到

$$\lambda = 0 \quad K_1 = 1$$

$$\lambda = j \Delta\theta_0 \quad e^{j \Delta\theta_0} = K_1 + K_2 j \Delta\theta_0 + K_3 (j \Delta\theta_0)^2$$

$$\lambda = -j \Delta\theta_0 \quad e^{-j \Delta\theta_0} = K_1 - K_2 j \Delta\theta_0 + K_3 (-j \Delta\theta_0)^2$$

由第一式得 $K_1 = 1$

第二式和第三式相加得

$$e^{j \Delta\theta_0} + e^{-j \Delta\theta_0} = 2 - 2K_3 \Delta\theta_0^2$$

由

$$\cos \Delta\theta_0 = \frac{e^{j \Delta\theta_0} + e^{-j \Delta\theta_0}}{2}$$

故

$$K_3 = \frac{1 - \cos \Delta\theta_0}{(\Delta\theta_0)^2}$$

第二式减第三式得

$$e^{j \Delta\theta_0} - e^{-j \Delta\theta_0} = 2K_2 \Delta\theta_0$$

由

$$\frac{e^{j \Delta\theta_0} - e^{-j \Delta\theta_0}}{2} = \sin \Delta\theta_0$$

故

$$K_2 = \frac{\sin \Delta\theta_0}{\Delta\theta_0}$$

代入(3-17)式得

$$e^{\Delta\theta_{n\ b}^{b\ k}} = I + \frac{\sin\Delta\theta_0}{\Delta\theta_0} \Delta\theta_{n\ b}^{b\ k} + \frac{1-\cos\Delta\theta_0}{\Delta\theta_0^2} (\Delta\theta_{n\ b}^{b\ k})^2 \quad (3-18)$$

代入(3-15)式则

$$C_n^b(t+\Delta t) = C(t) \left[I + \frac{\sin\Delta\theta_0}{\Delta\theta_0} \Delta\theta_{n\ b}^{b\ k} + \frac{1-\cos\Delta\theta_0}{\Delta\theta_0^2} (\Delta\theta_{n\ b}^{b\ k})^2 \right] \quad (3-19)$$

(3-19)式即为矩阵微分方程的精确解, 这个精确解的前提条件是

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \omega_{n\ b}^{b\ k} dt = \Delta\theta_{n\ b}^{b\ k}$$

这个式子只有在 $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ 内角速度矢量 $\omega_{n\ b}$ 方向不变的前提下才有意义, 由于转动的不可交换性, 当 $\omega_{n\ b}$ 方向随时间变化时, 角速度的积分是无意义的。转动不可交换性的概念, 在本节的后边再作介绍。

用方向余弦法求解姿态矩阵避免了欧拉角法方程退化的现象, 可以全姿态工作, 但是, 由于方向余弦矩阵具有九个元素, 所以, 解算矩阵微分方程时, 实际上是解算九个联立微分方程, 一般说来, 计算工作量是比较大的, 为了减小计算工作量, 可以采用四参数法。下面我们主要介绍四元素法。

三、四元数法

四元数理论是数学中的一个古老的分支, 1943年由哈密顿首先提出来, 目的是研究空间几何, 一种类似平面问题中使用复数那样的方法。但是, 这个理论建立之后, 长期没有得到实际应用, 直到空间技术出现以后, 特别是捷联式制导技术出现以后, 这一古老的数学分支, 又重新受到人们的重视, 得到了实际应用。有关四元数的一些基本性质, 我们放在附录中介绍, 这里只介绍它在刚体定位方面的应用, 具体到确定姿态矩阵中的应用。

1. 四元数的基本概念

四元数是由一个实数单位 1 和一个虚数单位 i 、 j 、 k 组成的含有四个元的数, 其形式为

$$Q = (q_0, q_1, q_2, q_3) = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \\ = q_0 + \mathbf{q}$$

式中 q_0 —— 标量

\mathbf{q} —— 矢量

我们知道, 在平面问题中, 一个复数 $Z = z_1 + jz_2$ 可以表示二维空间中的一个矢量 (见图3-4)

$$Z = z_1 + jz_2 \\ = |z| e^{j\alpha} \\ = |z| \cos\alpha + j|z| \sin\alpha$$

如果把虚数 $j = \sqrt{-1}$ 推广为空间中的一个单位矢量 \mathbf{u} , 则

$$\mathbf{u} = u_x i + u_y j + u_z k \\ |\mathbf{u}| = 1$$

则复数 Z 变为:

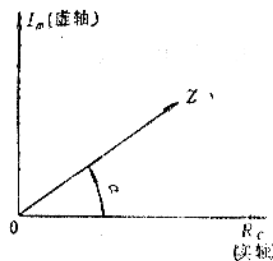


图3-4 复平面中的矢量表示法

$$\begin{aligned} Z &= |Z| \cos \alpha + u_x |Z| \sin \alpha i + u_y |Z| \sin \alpha j + u_z |Z| \sin \alpha k \\ &= |Z| [\cos \alpha + u_x \sin \alpha i + u_y \sin \alpha j + u_z \sin \alpha k] \end{aligned}$$

我们表示:

$$\begin{aligned} Q &= Z \\ |Z| \cos \alpha &= q_0 \quad |Z| u_x \sin \alpha = q_1 \\ |Z| u_y \sin \alpha &= q_2 \quad |Z| u_z \sin \alpha = q_3 \end{aligned}$$

则有:

$$\begin{aligned} Q &= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \\ &= |Q| e^{u \alpha} \\ &= |Q| [\cos \alpha + u \sin \alpha] \end{aligned} \quad (3-20)$$

(3—20)式为四元数的三种表示形式, 由于它具有和复数类似的形式, 所以可以看作是复数的推广, 因此也有“超复数”之称。

在刚体定点转动理论中, 根据欧拉定理, 动坐标系相对参考坐标系的方位, 等效于动坐标系绕某一个固定轴转动一个角度 θ (见图 3—5)。固定轴也叫欧拉轴, 角度 θ 有时也叫

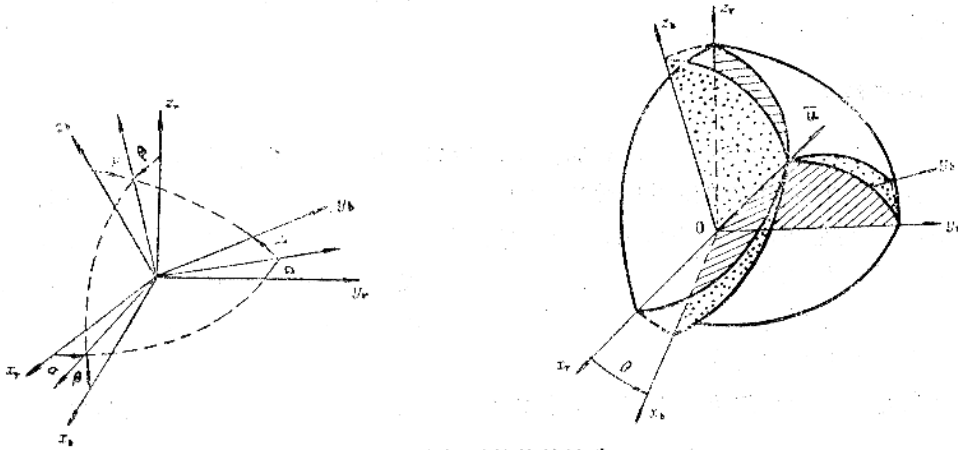


图3—5 坐标系的等效转动

欧拉角, 如果用 u 表示欧拉轴向上的单位矢量, 则动坐标系的方位, 完全可由 u 和 θ 两个参数来确定。用 u 和 θ 两个参数, 可以构造一个四元数,

$$\begin{aligned} Q &= \cos \frac{\theta}{2} + u \sin \frac{\theta}{2} \\ &= e^{\frac{1}{2} u \theta} \end{aligned} \quad (3-21)$$

如果把 u 写成分量的形式则:

$$\begin{aligned} Q &= \cos \frac{\theta}{2} + u_x \sin \frac{\theta}{2} i + u_y \sin \frac{\theta}{2} j + u_z \sin \frac{\theta}{2} k \\ &= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \end{aligned}$$

式中:

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2} \quad q_1 = u_x \sin \frac{\theta}{2}$$

$$q_2 = u_y \sin \frac{\theta}{2} \quad q_3 = u_z \sin \frac{\theta}{2}$$

显然, (3—21)的四元数是张量为1的四元数, 即

$$|Q| = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{\frac{1}{2}} = 1$$

这样的四元数叫作“规范化”的四元数, 而用来描述刚体定点转动的四元数(3—21式), 就叫作变换四元数。

四元数的三个虚数 i, j, k 遵守下列相乘规则:

$$\left. \begin{aligned} i \circ i = j \circ j = k \circ k = -1 \\ i \circ j = -j \circ i = k \\ j \circ k = -k \circ j = i \\ k \circ i = -i \circ k = j \end{aligned} \right\} \quad (3-22)$$

式中用符号“ \circ ”表示四元数相乘, 从(3—22)式可见, 第一式符合虚数相乘的规律, 而后三式则符合单位矢量乘的规律, 可见, 四元数相乘的规则, 即不同于虚数相乘, 也不同于矢量相乘。这一点在运算时要特别注意, 四元数的这一运算特点, 是由它的性质决定的。四元数是由一个实数和三个虚数构成的, 所以是四维空间中的一个矢量, 但是它的三个虚数又具有三维空间中的矢量性质, 因此, 三维空间中的一个矢量, 可以看作是实部为零的一个四元数, 这个四元数是三维空间的一个矢量在四维空间的“映象”, 或者叫作矢量的四元数映象。这样, 我们就把三维空间和一个四维空间联系起来, 用四维空间中四元数的性质和运算规律来研究三维空间中的刚体定点转动问题。

2. 矢量坐标变换的四元数描述

一个矢量 r 在参考坐标系 (我们这里用地理坐标系作参考) 轴向的分量形式为

$$r = x_n i_n + y_n j_n + z_n k_n$$

式中 x_n, y_n, z_n 为 r 在地理坐标系轴向的分量。 i_n, j_n, k_n 为地理坐标系轴向的单位矢量。我们用 x_n, y_n, z_n 把 r 写成四元数的形式, 即

$$\begin{aligned} R_n &= 0 + x_n i + y_n j + z_n k \\ &= 0 + r \end{aligned}$$

R_n 就叫作矢量 r 在地理坐标系上的四元数映象。 i, j, k 是四元数的虚数单位, 而 r 则是四元数的矢量部份。显然, 如果认为 i, j, k 和 i_n, j_n, k_n 重合, 则四元数的矢量部分就是三维空间的矢量 r 本身。

假定矢量 r 绕通过定点“0”的某一轴转动了一个角度 θ , 则和矢量固联的动坐标系和参考坐标系之间的变换四元数为:

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + u \sin \frac{\theta}{2}$$

式中 u 为转轴方向的单位矢量。

转动前的矢量用 r 表示, 转动后的矢量用 r' 表示 (见图 3—6), 则 r' 和 r 的关系可由四元数来描述, 即

$$r' = Q \circ r \circ Q^* \quad (3-23)$$

式中 $Q^* = \cos \frac{\theta}{2} - u \sin \frac{\theta}{2}$, 称作四元数的共轭四元数。

把(3—23)式前乘以 Q^* , 后乘以 Q , 则有

$$Q^* \cdot r' \cdot Q = Q^* \cdot Q \cdot r \cdot Q^* \cdot Q$$

由

$$Q^* \cdot Q = Q \cdot Q^* = 1$$

故

$$r = Q^* \cdot r' \cdot Q \quad (3-24)$$

(3—23)式的证明如下: 当矢量 r 绕 OO' 旋转时, 矢端点 A 在空间的轨迹是一个圆, 这个圆平面和转轴垂直(图3—6), 圆心为 O' 在旋转轴上。在圆上取一点 B , 使 $\angle AO'B = 90^\circ$, 则按矢量关系有下列关系式:

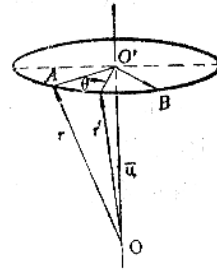


图3—6 矢量旋转

$$\begin{aligned} \overline{O'O} &= (r \cdot u)u \\ \overline{O'A} &= r - \overline{OO'} = r - (r \cdot u)u \\ \overline{O'B} &= u \times \overline{O'A} = u \times r - (r \cdot u)(u \times u) = u \times r \\ \overline{O'A'} &= \cos \theta \overline{O'A} + \sin \theta \overline{O'B} \\ &= \cos \theta r - \cos \theta (r \cdot u)u + \sin \theta (u \times r) \\ r' &= \overline{OO'} + \overline{O'A'} \\ &= (1 - \cos \theta)(r \cdot u)u + \cos \theta r + \sin \theta (u \times r) \end{aligned}$$

$Q \cdot r \cdot Q^*$ 按四元数相乘的规则展开得

$$\begin{aligned} Q \cdot r \cdot Q^* &= \left[-\sin \frac{\theta}{2} (r \cdot u) + \cos \frac{\theta}{2} r + \sin \frac{\theta}{2} (u \times r) \right] \cdot \left(\cos \frac{\theta}{2} + u \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} r + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (u \times r) + \sin^2 \frac{\theta}{2} (r \cdot u)u \\ &\quad - \sin^2 \frac{\theta}{2} (u \times r) \times u \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} r + \sin \theta (u \times r) + \sin^2 \frac{\theta}{2} (r \cdot u)u \\ &\quad - \sin^2 \frac{\theta}{2} [(u \cdot u)r - (u \cdot r)u] \\ &= \cos \theta r + \sin \theta (u \times r) + (1 - \cos \theta)(r \cdot u)u \end{aligned}$$

即

$$r' = Q \cdot r \cdot Q^*$$

(3—23), (3—24)两式即为旋转矢量坐标变换的四元数描述。它和用方向余弦矩阵描述的旋转矢量坐标变换对应关系如下:

$$\begin{aligned} r'^n &= (C_n^b)^T r^n \leftrightarrow r'^n = Q \cdot r^n \cdot Q^* \\ r^n &= C_n^b r'^n \leftrightarrow r^n = Q^* \cdot r'^n \cdot Q \end{aligned}$$

下面我们研究固定矢量坐标变换的四元数描述, 如果一个固定矢量 r 在参考坐标系和动坐标系内的分量形为

$$\begin{aligned} r &= x_n i_n + y_n j_n + z_n k_n \\ (3-25) \quad &= x_b i_b + y_b j_b + z_b k_b \end{aligned}$$

如果用 Q 表示动坐标系和参考坐标系之间的变换矩阵, 则按矢量转动的(3—23)式有

$$i_b = Q \circ i_r \circ Q^*$$

$$j_b = Q \circ j_r \circ Q^*$$

$$k_b = Q \circ k_r \circ Q^*$$

故

$$\begin{aligned} r &= x_n i_n + y_n j_n + z_n k_n \\ &= x_b i_b + y_b j_b + z_b k_b \\ &= x_b Q \circ i_n \circ Q^* + y_b Q \circ j_n \circ Q^* + z_b Q \circ k_n \circ Q^* \\ &= Q \circ (x_n i_n + y_n j_n + z_n k_n) \circ Q^* \end{aligned}$$

我们表示

$$R_n = x_n i_n + y_n j_n + z_n k_n$$

$$R_b = x_b i_b + y_b j_b + z_b k_b$$

则有

$$R_n = Q \circ R_b \circ Q^* \quad (3-25)$$

或

$$R_b = Q^* \circ R_n \circ Q \quad (3-26)$$

(3—25)(3—26)即为固定矢量坐标变换的四元数描述, 和用方向余弦矩阵表示的固定矢量的坐标变换有如下对应关系:

$$r^b = C_n^b r^n \leftrightarrow R_b = Q^* \circ R_n \circ Q$$

$$r^n = (C_n^b)^T r^b \leftrightarrow R_n = Q \circ R_b \circ Q^*$$

3. 四元数和方向余弦的关系

我们把固定矢量的坐标变换式(3—26)写成四元数的矩阵形式

$$Q(R_b) = M(Q^*) M^*(Q) \bar{Q}(R_n) \quad (3-27)$$

式中

$$Q(R_b) = [0 \quad x_b \quad y_b \quad z_b]^T$$

$$Q(R_n) = [0 \quad x_n \quad y_n \quad z_n]^T$$

$$M(Q^*) = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

$$M^*(Q) = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

故(3—27)式为

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_1^2 + q_0^2 - q_3^2 - q_2^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 0 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_2^2 - q_3^2 + q_0^2 - q_1^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 0 & 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_3^2 - q_2^2 - q_1^2 + q_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

把第一行第一列去掉则得

$$\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^2 + q_0^2 - q_3^2 - q_2^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_2^2 - q_3^2 + q_0^2 - q_1^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_3^2 - q_2^2 - q_1^2 + q_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \quad (3-28)$$

由(3-3)式

$$\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

显然，两个变换矩阵相等，即对应元素相等，如果知道了变换四元数 \mathbf{Q} 的四个元，则可以求出姿态矩阵的九个元素，并构成姿态矩阵。反过来，如果知道了姿态矩阵的九个元素，也可以相应的求出变换四元数的四个元。如：

$$T_{11} + T_{22} = 2(q_0^2 - q_3^2)$$

$$T_{11} + T_{33} = 2(q_0^2 - q_2^2)$$

$$T_{22} + T_{33} = 2(q_0^2 - q_1^2)$$

考虑到变换四元数是规范化的四元数，即

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

联立求解以上三个方程得

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + T_{11} + T_{22} + T_{33}} \\ q_1 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + T_{11} - T_{22} - T_{33}} \\ q_2 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - T_{11} + T_{22} - T_{33}} \\ q_3 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - T_{11} - T_{22} + T_{33}} \end{aligned} \right\} (3-29)$$

(3—29)式的符号可用如下的方法确定。考虑相对对角线对称的诸元素之差, 则有

$$4q_0q_1 = T_{23} - T_{32}$$

$$4q_0q_2 = T_{31} - T_{13}$$

$$4q_0q_3 = T_{12} - T_{21}$$

只要先决定 q_0 的符号, 则 q_1, q_2, q_3 的符号可由上式决定, 而 q_0 的符号实际上是任意的, 因为变换四元数的四个参数同时变符号, 四元数不变。由此取

$$\left. \begin{aligned} \text{sign } q_0 &= + \\ \text{sign } q_1 &= \text{sign}(T_{23} - T_{32}) \\ \text{sign } q_2 &= \text{sign}(T_{31} - T_{13}) \\ \text{sign } q_3 &= \text{sign}(T_{12} - T_{21}) \end{aligned} \right\} \quad (3-30)$$

四元数和欧拉角的关系可按附录(B—21)式求出, 即

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1^e \cdot \mathbf{Q}_2^e \cdot \mathbf{Q}_3^e \quad (B-21)$$

式中

$$\mathbf{Q}_1^e = \cos \frac{\psi}{2} + k_n \sin \frac{\psi}{2}$$

$$\mathbf{Q}_2^e = \cos \frac{\theta}{2} + j_n \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\mathbf{Q}_3^e = \cos \frac{\gamma}{2} + i_n \sin \frac{\gamma}{2}$$

代入(B—21)式, 按四元数相乘展开可得

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ q_1 &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \\ q_2 &= \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ q_3 &= \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3-31)$$

如果知道了三个欧拉角, 则按上式可以求出相应的变换四元数。

4. 四元数微分方程

我们考虑一个动坐标系 b 以角速度 ω 相对参考坐标系转动, 则动坐标系和参考坐标系之间的变换四元数 \mathbf{Q} 是时间的函数, 如用 $\mathbf{Q}(t)$ 表示 t 时刻的四元数, $\mathbf{Q}(t + \Delta t)$ 为 $t + \Delta t$ 时刻的四元数 (见图 3—7), 则 $\mathbf{Q}(t + \Delta t)$ 相当于 $\mathbf{Q}(t)$ 和 $\Delta \mathbf{Q}(t)$ 两次转动的合成四元数, 故

$$\mathbf{Q}(t + \Delta t) = \Delta \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) \quad (3-32)$$

或

$$\mathbf{Q}^e(t + \Delta t) = \mathbf{Q}^e(t) \cdot \Delta \mathbf{Q}^e(t) \quad (3-33)$$

考虑 Δt 很小, 在 Δt 时间内动坐标系转动的角速度为 $\Delta \theta$, 则

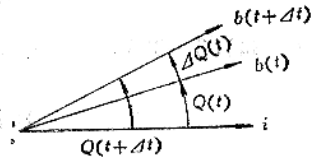


图3—7 变换四元数

$$\begin{aligned}\Delta Q(t) &= \cos \frac{\Delta \theta}{2} + u \sin \frac{\Delta \theta}{2} \\ &\approx 1 + u \frac{\Delta \theta}{2}\end{aligned}$$

由于 $\Delta \theta$ 是由 ω 在 Δt 时间内转过的角度故

$$u \Delta \theta = \omega \Delta t$$

表示

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_{b1} i_b + \omega_{b2} j_b + \omega_{b3} k_b \\ &= \omega_{n1} i_n + \omega_{n2} j_n + \omega_{n3} k_n \\ &= \omega_n\end{aligned}$$

而 $\omega_b = \omega_{b1} i_n + \omega_{b2} j_n + \omega_{b3} k_n$, 则为 ω 的“映像”。故

$$\begin{aligned}\Delta Q^c(A) &= 1 + \frac{1}{2} \omega_b \Delta t \\ Q(t) &= Q^c(t)\end{aligned}$$

代入(3—33)中得

$$\begin{aligned}Q^c(t + \Delta t) &= Q^c(t) \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \omega_b \Delta t \right] \\ &= Q^c(t) + \frac{1}{2} Q^c(t) \cdot \omega_b \Delta t\end{aligned}$$

我们定义

$$\begin{aligned}\dot{Q}^c(t) &\triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q^c(t + \Delta t) - Q^c(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2} Q^c(t) \cdot \omega_b\end{aligned} \quad (3-34)$$

如果利用(3—32)式, 则

$$\Delta Q(t) = 1 + \frac{1}{2} \omega_n \Delta t$$

故

$$\begin{aligned}Q(t + \Delta t) &= \left(1 + \frac{1}{2} \omega_n \Delta t \right) \cdot Q(t) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} &= \dot{Q}(t) = \frac{1}{2} \omega_n \cdot Q(t)\end{aligned} \quad (3-35)$$

(3—34)(3—35)为四元数微分方程, 是四元数相乘。如果写成矩阵的形式就是

$$Q(\dot{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{M}(q) Q(\omega_b)$$

或

$$Q(\dot{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{M}^*(\omega_b) Q(q)$$

即

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{bx} & -\omega_{by} & -\omega_{bz} \\ \omega_{bx} & 0 & \omega_{bz} & -\omega_{by} \\ \omega_{by} & -\omega_{bz} & 0 & \omega_{bx} \\ \omega_{bz} & \omega_{by} & -\omega_{bx} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (3-36)$$

或

$$\mathbf{Q}(\dot{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{M}(\omega_n) \mathbf{Q}(q)$$

即

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{nx} & -\omega_{ny} & -\omega_{nz} \\ \omega_{nx} & 0 & -\omega_{nz} & \omega_{ny} \\ \omega_{ny} & \omega_{nz} & 0 & -\omega_{nx} \\ \omega_{nz} & -\omega_{ny} & \omega_{nx} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (3-37)$$

5. 四元数微分方程的解

和矩阵方程类似, 可用毕卡逼近法求解。对

$$\mathbf{Q}(\dot{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{M}^*(\omega_b) \mathbf{Q}(q)$$

当 $\mathbf{M}^*(\omega_b)$ 和 $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}^*(\omega_b) dt$ 相乘满足可交换律时, 利用毕卡逼近法求解, 可得

$$\mathbf{Q}(q) = e^{\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}^*(\omega_b) dt} \mathbf{Q}(q)_{t=0}$$

或简写为

$$q(t) = e^{\frac{1}{2} [\Delta\theta]} q(0) \quad (3-38)$$

式中

$$q(t) = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T$$

$q(0)$ 是 $t=0$ 时的 q 值, 为初始条件。

$$\begin{aligned} [\Delta\theta] &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}^*(\omega_b) dt \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\theta_x & -\Delta\theta_y & -\Delta\theta_z \\ \Delta\theta_x & 0 & \Delta\theta_z & -\Delta\theta_y \\ \Delta\theta_y & -\Delta\theta_z & 0 & \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_z & \Delta\theta_y & -\Delta\theta_x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-39)$$

类似方向余弦矩阵微分方程解的情况, 可以用求 $[\Delta\theta]$ 特征值的方法, 把 (3-38) 式写成三角函数形式, 我们这里采用一种更简便的方法, 把 $e^{\frac{1}{2} [\Delta\theta]}$ 展开得

$$e^{\frac{1}{2} [\Delta\theta]} = I + \frac{[\theta]}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{[\Delta\theta]}{2} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{[\Delta\theta]}{2} \right)^3 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{[\Delta\theta]}{2} \right)^n + \dots$$

考虑到

$$[\Delta\theta]^2 = -[\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2]I = -\Delta\theta_0^2 I$$

$$[\Delta\theta]^3 = -\Delta\theta_0^3 [\Delta\theta]$$

$$[\Delta\theta]^4 = \Delta\theta_0^4 I \text{ 等。}$$

则

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}[\Delta\theta]} &= \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta\theta_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\Delta\theta_0}{2} \right)^4 - \frac{1}{6!} \left(\frac{\Delta\theta_0}{2} \right)^6 + \dots \right] I \\ &+ \frac{[\Delta\theta]}{\Delta\theta_0} \left[\frac{\Delta\theta_0}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta\theta_0}{2} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\Delta\theta_0}{2} \right)^5 - \frac{1}{7!} \left(\frac{\Delta\theta_0}{2} \right)^7 + \dots \right] \\ &= \cos \frac{\Delta\theta_0}{2} I + \frac{[\Delta\theta]}{\Delta\theta_0} \sin \frac{\Delta\theta_0}{2} \end{aligned}$$

故

$$q(t) = \left\{ \cos \frac{\Delta\theta_0}{2} I + \frac{\sin \frac{\Delta\theta_0}{2}}{\Delta\theta_0} [\Delta\theta] \right\} q(0) \quad (3-40)$$

(3—40)即为四元数微分方程的解析解。

四、等效转动矢量法

1. 转动的不可交换性

我们知道，在力学中，刚体的有限转动是不可交换的。如图(3—8)所示，如果刚体先绕 x 轴转动 90° ，再绕 y 轴转动 90° ，和先绕 y 轴转动 90° ，再绕 x 轴转动 90° ，两种情况的结果显然是不同的。这就是转动的不可交换性。这个转动的不可交换性决定了转动不是矢量，也就是两次以上的不同轴的转动不能相加。对一个在空间方向随时间变化的角速度矢量进行积

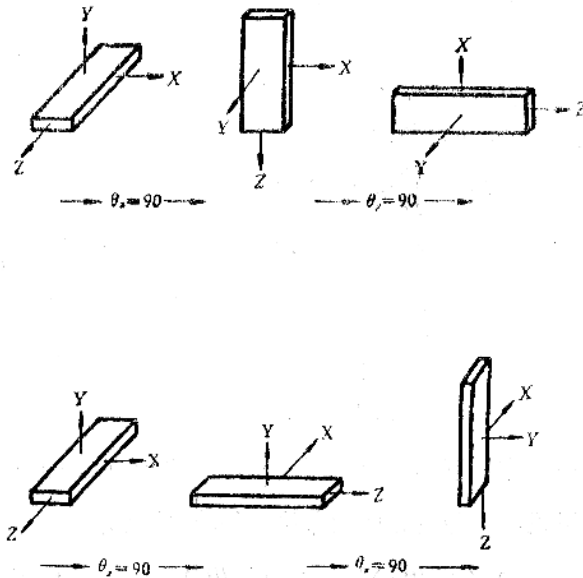


图3—8 转动的不可交换性

分, 则是无意义的。也就是角速度的积分是不能成立的, 只能在很小的时间区间内积分, 把 ω 近似看作方向不变时, 积分才能成立。

转动的不可交换性也反映在变换矩阵的合成上, 如果坐标系 $oxyz$ 绕 x 轴转动 θ_x 角变成 $ox_1y_1z_1$ 再绕 y 轴转动 θ_y , 则

$$\begin{aligned} oxyz \xrightarrow{\theta_x} ox_1y_1z_1 \quad C_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix} \\ ox_1y_1z_1 \xrightarrow{\theta_y} ox_2y_2z_2 \quad C_y &= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} C &= C_y C_x \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_x \sin\theta_y & -\sin\theta_y \cos\theta_y \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x \\ \sin\theta_y - \sin\theta_x \cos\theta_y & \cos\theta_x \cos\theta_y & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

如转动的顺序反向, 则

$$C' = C_x C_y = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y \\ \sin\theta_x \sin\theta_y & \cos\theta_x & \sin\theta_x \cos\theta_y \\ \cos\theta_x \sin\theta_y - \sin\theta_x & \cos\theta_x \cos\theta_y & \end{bmatrix}$$

很明显, $C_x C_y \neq C_y C_x$

但是, 对小角度, 则可以看作是矢量, 如果把 θ_x, θ_y 都看作一阶小量的小角度, 则 $\cos\theta \approx 1, \sin\theta \approx \theta$, 则在忽略二阶小量的情况下

$$C_x C_y = C_y C_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\theta_y \\ 0 & 1 & \theta_x \\ \theta_y & -\theta_x & 1 \end{bmatrix}$$

可见, 对小转角的转动是可以交换的, 即小角度可以看作是矢量, 能按矢量相加。

我们在对方向余弦矩阵微分方程和四元数微分方程求解时, 都用了角速度矢量的积分,

即

$$\Delta\theta = \int_t^{t+\Delta t} \omega dt$$

积分区间即采样周期, 显然, 采样周期必须很小, 否则, 计算结果中会有较大的不可交换性误差, 而采样周期太小, 使计算机实时计算工作量增大。为了消除不可交换性误差, 可采用等效转动矢量算法。

2. 等效转动矢量微分方程

如前所述, 动坐标系和参考坐标系之间的变换四元数为

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + u \sin \frac{\theta}{2}$$

式中 \mathbf{u} 为等效转轴方向的单位矢量。

θ 为动坐标系绕 \mathbf{u} 转动的角度。

我们利用 \mathbf{u} 和 θ 定义一个等效转动矢量

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{u} \quad (3-41)$$

由四元数微分方程可得

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = 2\mathbf{Q}^*(t) \cdot \dot{\mathbf{Q}}(t)$$

按四元数相乘的规则展开得

$$\boldsymbol{\omega}_0 = 2(q_0 \dot{q}_0 + q_0 \dot{\mathbf{q}} - \dot{q}_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}) \quad (3-42)$$

由

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2} \quad \mathbf{q} = \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2}$$

得

$$\dot{q}_0 = -\frac{\dot{\theta}}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{u}} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{\dot{\theta}}{2} \mathbf{u} \cos \frac{\theta}{2}$$

代入(3-42)并稍作整理得

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\theta} \mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}} \sin \theta + \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u} (1 - \cos \theta) \quad (3-43)$$

由(3-41)式有

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\theta} \mathbf{u} + \theta \dot{\mathbf{u}}$$

即

$$\dot{\theta} \mathbf{u} = \dot{\boldsymbol{\theta}} - \theta \dot{\mathbf{u}}$$

两边点乘 \mathbf{u} 得

$$\dot{\theta} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{u} - \theta \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}$$

$$\dot{\theta} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1 \quad \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} = 0$$

故

$$\dot{\theta} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{u}$$

由

$$\mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta}$$

有

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\dot{\boldsymbol{\theta}} \theta - \boldsymbol{\theta} \dot{\theta}}{\theta^2}$$

$$= \frac{\dot{\boldsymbol{\theta}} \theta - \boldsymbol{\theta} (\dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{\theta} / \theta)}{\theta^2}$$

$$= \frac{\dot{\boldsymbol{\theta}}}{\theta} - \frac{\boldsymbol{\theta} (\dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{\theta})}{\theta^3}$$

由

$$\bar{\mathbf{a}} \times (\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{c}}) = \bar{\mathbf{b}} (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{c}}) - \bar{\mathbf{c}} (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}})$$

得

$$\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{\theta} (\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \dot{\boldsymbol{\theta}} (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta})$$

即 $\theta(\theta \cdot \dot{\theta}) = \theta \times (\theta \times \dot{\theta}) + \dot{\theta}(\theta^2)$

代入 \dot{u} 中得

$$\dot{u} = -\frac{\theta \times (\theta \times \dot{\theta})}{\theta^3}$$

故

$$\dot{\theta} u = \ddot{\theta} + \frac{\theta \times (\theta \times \dot{\theta})}{\theta^2} \quad (3-44)$$

$$\dot{u} \sin \theta = -\frac{\theta \times (\theta \times \dot{\theta})}{\theta^3} \sin \theta \quad (3-45)$$

$$\begin{aligned} \dot{u} \times u(1 - \cos \theta) &= \left(\frac{\dot{\theta}}{\theta} - \frac{\theta \dot{\theta}}{\theta^2} \right) \times \frac{\theta}{\theta} (1 - \cos \theta) \\ &= \frac{\dot{\theta} \times \theta}{\theta^2} (1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (3-46)$$

把(3-44)、(3-45)、(3-46)代入(3-43)式得

$$\dot{\theta} = \omega_b + (1 - \cos \theta) \frac{\theta \times \dot{\theta}}{\theta^2} - \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \frac{\theta \times (\theta \times \dot{\theta})}{\theta^2}$$

或

$$\dot{\theta} = \omega_b + B(\theta) \theta \times \dot{\theta} - C(\theta) \theta \times (\theta \times \dot{\theta}) \quad (3-47)$$

式中

$$B(\theta) = \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}$$

$$C(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right)$$

(3-47)式即等效转动矢量微分方程。

表示

$$\sigma = B(\theta) \theta \times \dot{\theta} - C(\theta) \theta \times (\theta \times \dot{\theta})$$

则

$$\dot{\theta} = \omega_b + \sigma \quad (3-48)$$

(3-48)式说明, 等效转动矢量的导数等于 ω_b 再加一个修正量 σ , 使

$$\theta = \int (\omega_b + \sigma) dt \quad \text{成立。}$$

如果把 $B(\theta)$ 和 $C(\theta)$ 展成级数并只取第一项, 则(3-47)可简化为

$$\dot{\theta} = \omega_b + \frac{1}{2} \theta \times \dot{\theta} - \frac{1}{6} \theta \times (\theta \times \dot{\theta}) \quad (3-49)$$

等效转动矢量的另外形式为

$$\dot{\theta} = \omega_b + \frac{1}{2} \theta \times \omega + A(\theta) \theta \times (\theta \times \omega) \quad (3-50)$$

式中

$$A(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \left[1 - \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \right]$$

或

$$\dot{\theta} = \omega_b + \theta \times \left(\frac{C(\theta)}{B(\theta)} \omega_b + 2A(\theta) \dot{\theta} \right) \quad (3-51)$$

(3—50)和(3—51)式都可以从(3—47)式推演出来。把 $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$, 展成级数有

$$A(\theta) = \frac{1}{12} + \frac{\theta^2}{720} + \frac{\theta^4}{30240} + \frac{\theta^6}{1209600} + \dots$$

$$B(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{\theta^2}{24} + \frac{\theta^4}{720} - \frac{\theta^6}{40320} + \dots$$

$$C(\theta) = \frac{1}{6} - \frac{\theta^2}{120} + \frac{\theta^4}{5040} - \frac{\theta^6}{362880} + \dots$$

只取第一项, 代入(3—50)(3—51)式得

$$\dot{\theta} = \omega_b + \frac{1}{2} \theta \times \omega_b + \frac{1}{12} \theta \times (\theta \times \omega) \quad (3-52)$$

$$\dot{\theta} = \omega_b + \theta \times \left(\frac{1}{3} \omega_b + \frac{1}{6} \dot{\theta} \right) \quad (3-53)$$

实际计算时可用(3—49)(3—52)(3—53)三式中任何一式。根据角速度 ω_b 计算等效转动矢量, 用等效转动矢量代替方向余弦矩阵微分方程或四元数微分方程解中的 $\Delta\theta$, 则可以消除计算的方向余弦矩阵或四元数中的不可交换性误差。等效转动矢量可以用于信息处理机来计算, 然后用 θ 再计算四元数式方向余弦矩阵(见图3—9)。等效转动矢量也可以用模拟机计

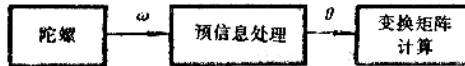


图3—9 用等效转动矢量计算四元数

算, 而其他计算仍用数学计算机, 这就是混合计算机的概念。

以上介绍的四种方法, 都可以用来确定一个动坐标系相对参考坐标系的方位关系。在捷联式惯导系统中, 既可以用来计算姿态矩阵, 也可以用来计算位置矩阵, 在实际的捷联式惯导系统中, 由于姿态矩阵的实时计算的速度要快, 所以, 比较多的是采用四元数法。而位置矩阵的实时计算速度可以较慢, 一般采用方向余弦法。

§ 3—3 姿态矩阵计算机上的执行算法

上一节我们讨论了矩阵微分方程和四元数微分方程的解析解, 而在机载导航计算机中实现姿态矩阵的计算时, 则是应用各种适用数字机计算的各种算法, 这一节我们介绍几种常用的机上执行算法。在姿态矩阵微分方程和姿态四元数微分方程中, 都用到飞行器相对导航坐标系的角速度 ω_{nb}^b , 而 $\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - \omega_{in}^b$ 。故

$$\begin{aligned} \dot{C}_n^b &= C_n^b (\omega_{ib}^b - \omega_{in}^b) \\ &= C_n^b \omega_{ib}^b - \omega_{in}^b C_n^b \end{aligned}$$

类似的情况, 四元数微分方程为

$$\begin{aligned} \dot{Q}^c(t) &= \frac{1}{2} Q^c(t) \cdot \omega_{nb}^b \\ &= \frac{1}{2} Q^c(t) \cdot (\omega_{ib}^b - \omega_{in}^b) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} [\mathbf{Q}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\omega}_{in}^n \cdot \mathbf{Q}^T(t)]$$

式中 $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 是由捷联式陀螺直接测量的机体坐标系相对惯性坐标系的角速度，由于这个角速度比较大，故 \mathbf{C}_b^n 和 $\mathbf{Q}(t)$ 中等号右边第一项的计算需要较高的速度，而 $\boldsymbol{\omega}_{in}^n$ 项一般较小，故第二项的计算可以用较低的速度进行，可以看作是周期的对第一项进行修正。下面我们讨论机上执行算法时，暂不考虑 $\boldsymbol{\omega}_{in}^n$ 项。

一、增量算法

捷联式陀螺仪，都是采用脉冲再平衡回路，所以陀螺的输出是脉冲串，每一个脉冲代表一个角增量，在一个采样周期内，用陀螺输出的脉冲串乘以标度因子即变成一个角增量，相应于： $\Delta\theta = \int_0^{T+\Delta t} \omega_{ib} dt$ ，如果利用这个角增量直接计算姿态矩阵或姿态四元数，则叫作增量算法。而增量的采样，可以有两种不同的方法，一种是采用固定增量，陀螺的输出只要达到规定的增量值即输入到计算机进行计算。另一种方法是定时采样，在规定的采样区间对陀螺输出进行采样，而不管角增量的大小。

1. 定时增量算法

定时增量算法是在每个采样周期 T 内，对陀螺的输出采样一次。如果对三个陀螺的采样角增量分别为 $\Delta\theta_x$ 、 $\Delta\theta_y$ 、 $\Delta\theta_z$ ，则按(3—19)式计算姿态矩阵。我们把(3—18)式展开合并可得

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} 1 - (\Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2)C & \Delta\theta_x \Delta\theta_y C - \Delta\theta_z S & \Delta\theta_z \Delta\theta_x C + \Delta\theta_y S \\ \Delta\theta_x \Delta\theta_y C + \Delta\theta_z S & 1 - (\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_z^2)C & \Delta\theta_y \Delta\theta_z C - \Delta\theta_x S \\ \Delta\theta_z \Delta\theta_y C - \Delta\theta_x S & \Delta\theta_y \Delta\theta_z C + \Delta\theta_x S & 1 - (\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2)C \end{bmatrix} \quad (3-54)$$

式中

$$C = \frac{1 - \cos \Delta\theta_0}{\Delta\theta_0^2} \quad S = \frac{\sin \Delta\theta_0}{\Delta\theta_0}$$

如果我们用 $\Delta\mathbf{C}$ 表示(3—54)式，则

$$\mathbf{C}_b^n(n+P) = \mathbf{C}_b^n(n) \Delta\mathbf{C}_{n+1} \Delta\mathbf{C}_{n+2} \cdots \Delta\mathbf{C}_{n+P}$$

式中 $n+P$ 表示 P 时刻的姿态矩阵。

或者写成迭代形式

$$\mathbf{C}_b^n(n+1) = \mathbf{C}_b^n(n) \Delta\mathbf{C}_{n+1} \quad (3-55)$$

在数字计算机上计算时， C 和 S 要展成级数，取有限项，并用 C_n 和 S_n 表示。

由

$$\sin \Delta\theta_0 = \Delta\theta_0 - \frac{\Delta\theta_0^3}{3!} + \frac{\Delta\theta_0^5}{5!} - \frac{\Delta\theta_0^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos \Delta\theta_0 = 1 - \frac{\Delta\theta_0^2}{2!} + \frac{\Delta\theta_0^4}{4!} - \frac{\Delta\theta_0^6}{6!} + \cdots$$

得

$$S_n = 1 - \frac{\Delta\theta_0^2}{3!} + \frac{\Delta\theta_0^4}{5!} - \frac{\Delta\theta_0^6}{7!} + \cdots$$

$$C_n = \frac{1}{2!} - \frac{\Delta\theta_0^2}{4!} + \frac{\Delta\theta_0^4}{6!} + \cdots$$

当 $\sin \Delta\theta_0$ 和 $\cos \Delta\theta_0$ 分别取 $n=1, 2, 3, 4$ 阶近似时, 则 C_n 和 S_n 的值见表 3—1.

表 3—1 C_n 和 S_n 值

n	C_n	S_n
1	0	1
2	$\frac{1}{2}$	1
3	$\frac{1}{2}$	$1 - \frac{\Delta\theta_0^2}{6}$
4	$\frac{1}{2} - \frac{\theta_0^2}{24}$	$1 - \frac{\Delta\theta_0^2}{6}$

把表 3—1 中的 C_n 和 S_n 的值分别代入到(3—54)式和(3—55)式则得各阶定时增量计算式.

一阶算法

$$\mathbf{C}_i^*(n+1) = \mathbf{C}_i^*(n) [I + \Delta\theta_i^{\frac{1}{2}}]$$

$$= \mathbf{C}_i^*(n) \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\theta_z & \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z & 1 & -\Delta\theta_x \\ -\Delta\theta_y & \Delta\theta_x & 1 \end{bmatrix} \quad (3-56)$$

如果表示 \mathbf{C}_i^* 为

$$\mathbf{C}_i^* = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}$$

则(3—56)可写作

$$\left. \begin{aligned} T_{11}(n+1) &= T_{11}(n) + T_{21}(n)\Delta\theta_z - T_{31}(n)\Delta\theta_y \\ T_{21}(n+1) &= T_{21}(n) + T_{31}(n)\Delta\theta_x - T_{11}(n)\Delta\theta_z \\ T_{31}(n+1) &= T_{31}(n) + T_{11}(n)\Delta\theta_y - T_{21}(n)\Delta\theta_z \\ T_{12}(n+1) &= T_{12}(n) + T_{22}(n)\Delta\theta_z - T_{33}(n)\Delta\theta_y \\ T_{22}(n+1) &= T_{22}(n) + T_{32}(n)\Delta\theta_x - T_{12}(n)\Delta\theta_z \\ T_{32}(n+1) &= T_{32}(n) + T_{12}(n)\Delta\theta_y - T_{22}(n)\Delta\theta_x \\ T_{13}(n+1) &= T_{13}(n) + T_{23}(n)\Delta\theta_z - T_{33}(n)\Delta\theta_y \\ T_{23}(n+1) &= T_{23}(n) + T_{33}(n)\Delta\theta_x - T_{13}(n)\Delta\theta_z \\ T_{33}(n+1) &= T_{33}(n) + T_{13}(n)\Delta\theta_y - T_{23}(n)\Delta\theta_x \end{aligned} \right\} \quad (3-57)$$

在导航计算机中实施计算时,可由(3—56)式按矩阵相乘的方法编制程序,其框图见图(3—10a)。也可以按(3—57)式计算元素代数方程的方法计算,其程序框图见图3—10b。

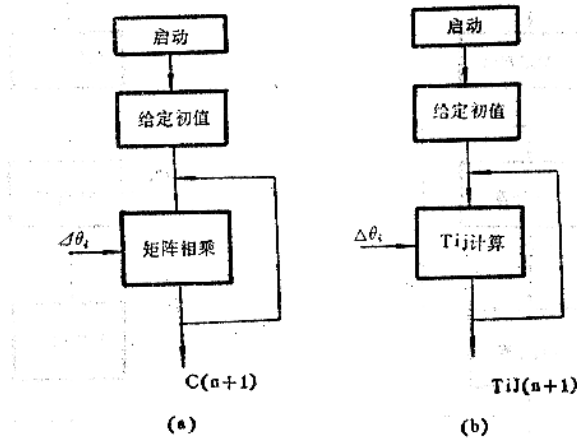


图3—10 定时增量一阶算法框图

二阶算法

$$C_i^n(n+1) = C_i^n \left[I + \Delta \theta_{ii}^{(2)} + \frac{1}{2} (\Delta \theta_{ii}^{(2)})^2 \right] \quad (3-58)$$

式中

$$I + \Delta \theta_{ii}^{(2)} + \frac{1}{2} (\Delta \theta_{ii}^{(2)})^2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} (\Delta \theta_y^2 + \Delta \theta_z^2) & \frac{1}{2} \Delta \theta_x \Delta \theta_y - \Delta \theta_z & \frac{1}{2} \Delta \theta_z \Delta \theta_x + \Delta \theta_y \\ \frac{1}{2} \Delta \theta_x \Delta \theta_y + \Delta \theta_z & 1 - \frac{1}{2} (\Delta \theta_x^2 + \Delta \theta_z^2) & \frac{1}{2} \Delta \theta_y \Delta \theta_z - \Delta \theta_x \\ \frac{1}{2} \Delta \theta_y \Delta \theta_z - \Delta \theta_x & \frac{1}{2} \Delta \theta_x \Delta \theta_z + \Delta \theta_y & 1 - \frac{1}{2} (\Delta \theta_x^2 + \Delta \theta_y^2) \end{bmatrix} \quad (3-59)$$

类似一阶算法的情况,二阶算法也可以写成九个元素的代数方程的形式。计算时,可以用矩阵相乘的方法编制程序,也可以用解代数联立方程的方法编制程序,其程序框见图(3—11)。

三阶算法

$$C_i^n(n+1) = C_i^n \left[I + \left(1 - \frac{\Delta \theta_0^2}{6}\right) \Delta \theta_{ii}^{(3)} + \frac{1}{2} (\Delta \theta_{ii}^{(3)})^2 \right] \quad (3-60)$$

四阶算法

$$C_i^n(n+1) = C_i^n \left[I + \left(1 - \frac{\Delta \theta_0^2}{6}\right) \Delta \theta_{ii}^{(4)} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta \theta_0^2}{24}\right) (\Delta \theta_{ii}^{(4)})^2 \right] \quad (3-61)$$

对三阶算法和四阶算法,也可以展开写成矩阵相乘的形式,或写成元素代数方程的形式,其程序框图和二阶算法类似。

四元数的定时增量算法,则可按(3—40)式计算,写成迭代形式为

$$q(n+1) = \left\{ \cos \frac{\Delta \theta_0}{2} I + \frac{\sin \frac{\Delta \theta_0}{2}}{\Delta \theta_0} [\Delta \theta] \right\} q(n)$$

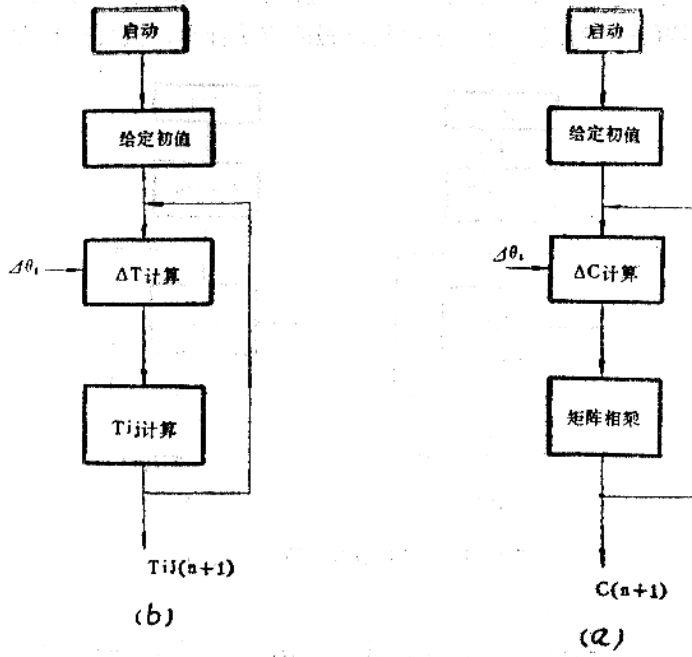


图3-11 二阶算法框图

表示

$$C = \cos \frac{\Delta\theta_0}{2} \quad S = \frac{\sin \frac{\Delta\theta_0}{2}}{\Delta\theta_0}$$

把 $\sin \frac{\Delta\theta_0}{2}$ 和 $\cos \frac{\Delta\theta_0}{2}$ 展成级数，取一阶到四阶近似时，则C和S的值见表(3-2)。则

表 3-2

阶次	C _n	S _n
1	1	$\frac{1}{2}$
2	$1 - \Delta\theta_0^2/8$	$\frac{1}{2}$
3	$1 - \Delta\theta_0^2/8$	$\frac{1}{2} - \Delta\theta_0^2/48$
4	$1 - \Delta\theta_0^2/8 + \Delta\theta_0^4/384$	$\frac{1}{2} - \Delta\theta_0^2/48$

一阶算法为

$$q(n+1) = \left\{ I + \frac{1}{2} [\Delta\theta] \right\} q(n)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\Delta\theta_x & -\frac{1}{2}\Delta\theta_y & -\frac{1}{2}\Delta\theta_z \\ \frac{1}{2}\Delta\theta_x & 1 & \frac{1}{2}\Delta\theta_z & -\frac{1}{2}\Delta\theta_y \\ \frac{1}{2}\Delta\theta_y & -\frac{1}{2}\Delta\theta_z & 1 & \frac{1}{2}\Delta\theta_x \\ \frac{1}{2}\Delta\theta_z & \frac{1}{2}\Delta\theta_y & -\frac{1}{2}\Delta\theta_x & 1 \end{pmatrix} \mathbf{q}(n) \quad (3-62)$$

展开可得

$$\left. \begin{aligned} q_0(n+1) &= q_0(n) - \frac{1}{2}\Delta\theta_x q_1(n) - \frac{1}{2}\Delta\theta_y q_2(n) - \frac{1}{2}\Delta\theta_z q_3(n) \\ q_1(n+1) &= q_1(n) + \frac{1}{2}\Delta\theta_x q_0(n) + \frac{1}{2}\Delta\theta_z q_3(n) - \frac{1}{2}\Delta\theta_y q_2(n) \\ q_2(n+1) &= q_2(n) + \frac{1}{2}\Delta\theta_y q_0(n) - \frac{1}{2}\Delta\theta_z q_1(n) + \frac{1}{2}\Delta\theta_x q_3(n) \\ q_3(n+1) &= q_3(n) + \frac{1}{2}\Delta\theta_z q_0(n) + \frac{1}{2}\Delta\theta_y q_1(n) - \frac{1}{2}\Delta\theta_x q_2(n) \end{aligned} \right\} (3-63)$$

和(3-57)式相比, 可见四元数法只计算四个方程, 显然计算工作量可大为减小。

四元数的二阶定时增量算法为

$$\mathbf{q}(n+1) = \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta_0^2}{8} \right) I + \frac{1}{2} [\Delta\boldsymbol{\Theta}] \right\} \mathbf{q}(n) \quad (3-64)$$

三阶算法为

$$\mathbf{q}(n+1) = \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta_0^2}{8} \right) I + \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta_0^2}{48} \right) [\Delta\boldsymbol{\Theta}] \right\} \mathbf{q}(n) \quad (3-65)$$

四阶算法为

$$\mathbf{q}(n+1) = \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\theta_0^2}{8} + \frac{\Delta\theta_0^4}{384} \right) I + \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta_0^2}{48} \right) [\Delta\boldsymbol{\Theta}] \right\} \mathbf{q}(n) \quad (3-66)$$

对二阶、三阶和四阶算法同一阶算法一样展开写成四个方程。按这四个方程用迭代法编制程序。

2. 固定增量算法

固定增量算法是对陀螺仪输出按一定的增量大小进行采样, 每个陀螺的输出达到规定增量时即被送入计算机。增量大小的选取按实时计算的要求和计算机的运算速度来确定, 我们用 $\Delta\theta$ 表示这个固定增量, 当X陀螺的输出 $\Delta\theta_x = \Delta\theta$ 时, 则按(3-18)式:

$$\begin{aligned} & I + \frac{\sin\Delta\theta_0}{\Delta\theta_0} \Delta\boldsymbol{\Theta}^{\frac{1}{2}} + \frac{1 - \cos\Delta\theta_0}{\Delta\theta_0^2} (\Delta\boldsymbol{\Theta}^{\frac{1}{2}})^2 \\ & = \Delta\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Delta\theta & \sin\Delta\theta \\ 0 & -\sin\Delta\theta & \cos\Delta\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当Y陀螺输出 $\Delta\theta_y = \Delta\theta$ 时, 有

$$\Delta \mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} \cos \Delta \theta & 0 & -\sin \Delta \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Delta \theta & 0 & \cos \Delta \theta \end{bmatrix}$$

当 z 陀螺输出 $\Delta \theta_z = \Delta \theta$ 时, 有

$$\Delta \mathbf{C}_z = \begin{bmatrix} \cos \Delta \theta & \sin \Delta \theta & 0 \\ -\sin \Delta \theta & \cos \Delta \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如果接受到陀螺输出增量的顺序为 X 陀螺, Y 陀螺, Z 陀螺, 则

$$\mathbf{C}_i^*(t + \Delta t) = \mathbf{C}_i^*(t) \Delta \mathbf{C}_x \Delta \mathbf{C}_y \Delta \mathbf{C}_z \quad (3-67)$$

式中 $\Delta \mathbf{C}_x$, $\Delta \mathbf{C}_y$, $\Delta \mathbf{C}_z$ 为在 Δt 区间中顺序接收到 $\Delta \theta_x = \Delta \theta$, $\Delta \theta_y = \Delta \theta$, $\Delta \theta_z = \Delta \theta$ 所构成的变换矩阵。如果接收陀螺增量的顺序改变, 则矩阵相乘的顺序也改变。对 \mathbf{C}_i^* 是依次后乘, 而如果是 \mathbf{C}_i 则依次前乘。在实际计算时, 是把 $\sin \Delta \theta$ 和 $\cos \Delta \theta$ 展成级数取一阶到四阶近似。

一阶算法

$$\Delta \mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\Delta \theta \\ 0 & \Delta \theta & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Delta \theta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{C}_z = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta \theta & 0 \\ \Delta \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二阶算法

$$\Delta \mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\Delta \theta^2}{2} & -\Delta \theta \\ 0 & \Delta \theta & 1 - \frac{\Delta \theta^2}{2} \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Delta \theta^2}{2} & 0 & \Delta \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Delta \theta & 0 & 1 - \frac{\Delta \theta^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{C}_z = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Delta \theta^2}{2} & -\Delta \theta & 0 \\ \Delta \theta & 1 - \frac{\Delta \theta^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

类似的情况, 可以写出三阶和四阶算法的计算式。在计算过程中, 如果同时接收到两个或三个陀螺的输出, 考虑到 $\Delta \theta$ 是小量, 对应矩阵相乘的顺序可以任意选取。固定增量算法的一阶算法是正确的, 而高阶算法则是存在着不可交换性误差。这是固有的方法误差。

对四元数同样可以采用固定增量算法。由(3—40)式, 当x陀螺输出 $\Delta\theta_x = \Delta\theta$ 时,

$$\begin{aligned} & \cos \frac{\Delta\theta_0}{2} I + \frac{\sin \frac{\Delta\theta_0}{2}}{\Delta\theta_0} [\Delta\theta] \\ \Rightarrow \mathbf{M}^*(q_x) = & \cos \frac{\Delta\theta}{2} I + \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta} \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\theta & 0 & 0 \\ \Delta\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta\theta \\ 0 & 0 & -\Delta\theta & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

当y陀螺输出 $\Delta\theta_y = \Delta\theta$ 时有

$$\mathbf{M}^*(q_y) = \cos \frac{\Delta\theta}{2} I + \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\Delta\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta\theta \\ \Delta\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当z陀螺输出 $\Delta\theta_z = \Delta\theta$ 时有

$$\mathbf{M}^*(q_z) = \cos \frac{\Delta\theta}{2} I + \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\Delta\theta \\ 0 & 0 & \Delta\theta & 0 \\ 0 & -\Delta\theta & 0 & 0 \\ \Delta\theta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{q}(t + \Delta t) = \mathbf{M}^*(q_z) \mathbf{M}^*(q_y) \mathbf{M}^*(q_x) \mathbf{q}(t) \quad (3-68)$$

相乘的顺序为按接收到增量的顺序依次前乘。类似方向余弦法的情况, 把 $\sin \frac{\Delta\theta}{2}$ 和 $\cos \frac{\Delta\theta}{2}$ 展成级数, 取表(3—2)中的各阶近似, 则可以得到四元数固定增量算法的各阶近似算式。

二、数值积分法

用数字计算机求解微分方程的数值积分算法有很多种, 这些方法都可以用来解算方向余弦矩阵微分方程和四元数微分方程, 可以根据计算的精度要求和计算机的字长和运算速度选用不同的算法。

1. 一阶龙格—库塔(Runge—Kutta)法

如果 $\dot{\mathbf{X}}(t) = f[\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\omega}(t)]$

则

$$\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{X}(t) + T f[\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\omega}(t)] \quad (3-69)$$

对姿态矩阵微分方程

$$\dot{\mathbf{C}}_b^s = \mathbf{C}_b^s \boldsymbol{\omega}_{b \times b}^s$$

展开写成元素微分方程的形式, 为了书写简单, 把 $\boldsymbol{\omega}$ 的上下标省掉, 则姿态矩阵微分方程的一阶龙格—库塔算法为

$$\begin{aligned}
T_{11}(t+T) &= T_{11}(t) + T[T_{21}(t)\omega_z(t) - T_{31}(t)\omega_y(t)] \\
T_{21}(t+T) &= T_{21}(t) + T[T_{31}(t)\omega_x(t) - T_{11}(t)\omega_z(t)] \\
T_{31}(t+T) &= T_{31}(t) + T[T_{11}(t)\omega_y(t) - T_{21}(t)\omega_x(t)] \\
T_{12}(t+T) &= T_{12}(t) + T[T_{22}(t)\omega_z(t) - T_{32}(t)\omega_y(t)] \\
T_{22}(t+T) &= T_{22}(t) + T[T_{32}(t)\omega_x(t) - T_{12}(t)\omega_z(t)] \\
T_{32}(t+T) &= T_{32}(t) + T[T_{12}(t)\omega_y(t) - T_{22}(t)\omega_x(t)] \\
T_{13}(t+T) &= T_{13}(t) + T[T_{23}(t)\omega_z(t) - T_{33}(t)\omega_y(t)] \\
T_{23}(t+T) &= T_{23}(t) + T[T_{33}(t)\omega_x(t) - T_{13}(t)\omega_z(t)] \\
T_{33}(t+T) &= T_{33}(t) + T[T_{13}(t)\omega_y(t) - T_{23}(t)\omega_x(t)]
\end{aligned} \tag{3-70}$$

姿态矩阵微分方程的一阶龙格—库塔算法的矩阵形式为

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_b^n(t+T) &= \mathbf{C}_b^n(t) + T\mathbf{C}_b^n(t)\boldsymbol{\omega}_b^{b\dot{b}}(t) \\
&= \mathbf{C}_b^n(t)[I + \boldsymbol{\omega}_b^{b\dot{b}}(t)T]
\end{aligned}$$

式中

$$\boldsymbol{\omega}_b^{b\dot{b}}T = \Delta\boldsymbol{\Theta}_b^{b\dot{b}}$$

故

$$\mathbf{C}_b^n(t+T) = \mathbf{C}_b^n(t)[I + \Delta\boldsymbol{\Theta}_b^{b\dot{b}}]$$

或

$$\mathbf{C}_b^n(n+1) = \mathbf{C}_b^n(n)[I + \Delta\boldsymbol{\Theta}_b^{b\dot{b}}] \tag{3-71}$$

可见，一阶龙格—库塔算法，和一阶增量算法完全相同。

对四元数微分方程

$$\dot{\mathbf{Q}}(q) = -\frac{1}{2}\mathbf{M}^*(\omega_b)\mathbf{Q}(q)$$

或简写为

$$\dot{q} = -\frac{1}{2}[\omega_b]q$$

一阶龙格—库塔算法为

$$\begin{aligned}
q(t+T) &= q(t) + \frac{T}{2}[\omega_b(t)]q(t) \\
&= \left\{ I + \frac{T}{2}[\omega_b(t)] \right\} q(t)
\end{aligned} \tag{3-72}$$

考虑

$$[\Delta\boldsymbol{\Theta}] = T[\omega_b]$$

故

$$q(t+T) = \left\{ I + \frac{1}{2}[\Delta\boldsymbol{\Theta}] \right\} q(t) \tag{3-72}$$

可见，四元数一阶龙格—库塔算法，和增量法的一阶算法也完全一样。把(3-72)式写成元素的形式为

$$\left. \begin{aligned}
 q_0(t+T) &= q_0(t) + \frac{T}{2}[-\omega_x(t)q_1(t) - \omega_y(t)q_2(t) - \omega_z(t)q_3(t)] \\
 q_1(t+T) &= q_1(t) + \frac{T}{2}[\omega_x(t)q_0(t) + \omega_z(t)q_2(t) - \omega_y(t)q_3(t)] \\
 q_2(t+T) &= q_2(t) + \frac{T}{2}[\omega_y(t)q_0(t) - \omega_z(t)q_1(t) - \omega_x(t)q_3(t)] \\
 q_3(t+T) &= q_3(t) + \frac{T}{2}[\omega_z(t)q_0(t) + \omega_y(t)q_1(t) - \omega_x(t)q_2(t)]
 \end{aligned} \right\} (7-73)$$

2. 二阶龙格-库塔法

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}(t) + T f[\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\omega}(t)]$$

$$\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{X}(t) + \frac{T}{2} \{ f[\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\omega}(t)] + f[\mathbf{Y}, \boldsymbol{\omega}(t+T)] \} \quad (3-74)$$

对姿态矩阵微分方程

$$\dot{\mathbf{C}}_b^a(t) = \mathbf{C}_b^a(t) \boldsymbol{\omega}_{nb}^{bk}(t)$$

则

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}_b^a(t) + T \mathbf{C}_b^a(t) \boldsymbol{\omega}_{nb}^{bk}(t)$$

$$\mathbf{C}_b^a(t+T) = \mathbf{C}_b^a(t) + \frac{T}{2} [\mathbf{C}_b^a(t) \boldsymbol{\omega}_{nb}^{bk}(t) + \mathbf{Y} \boldsymbol{\omega}_{nb}^{bk}(t+T)] \quad (3-75)$$

表示

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{21} & Y_{31} \\ Y_{12} & Y_{22} & Y_{32} \\ Y_{13} & Y_{23} & Y_{33} \end{bmatrix}$$

把(3-75)式写成元素的形式则

$$\left. \begin{aligned}
 Y_{11} &= T_{11}(t) + T[T_{21}(t)\omega_x(t) - T_{31}(t)\omega_y(t)] \\
 Y_{21} &= T_{21}(t) + T[T_{31}(t)\omega_x(t) - T_{11}(t)\omega_z(t)] \\
 Y_{31} &= T_{31}(t) + T[T_{11}(t)\omega_y(t) - T_{21}(t)\omega_x(t)] \\
 Y_{12} &= T_{12}(t) + T[T_{22}(t)\omega_x(t) - T_{32}(t)\omega_y(t)] \\
 Y_{22} &= T_{22}(t) + T[T_{32}(t)\omega_x(t) - T_{12}(t)\omega_z(t)] \\
 Y_{32} &= T_{32}(t) + T[T_{12}(t)\omega_y(t) - T_{22}(t)\omega_x(t)] \\
 Y_{13} &= T_{13}(t) + T[T_{23}(t)\omega_x(t) - T_{33}(t)\omega_y(t)] \\
 Y_{23} &= T_{23}(t) + T[T_{33}(t)\omega_x(t) - T_{13}(t)\omega_z(t)] \\
 Y_{33} &= T_{33}(t) + T[T_{13}(t)\omega_y(t) - T_{23}(t)\omega_x(t)]
 \end{aligned} \right\} (3-76)$$

$$\begin{aligned}
T_{11}(t+T) &= T_{11}(t) + \frac{T}{2} [T_{21}(t)\omega_z(t) - T_{31}(t)\omega_y(t) + Y_{21}\omega_x(t+T) - Y_{31}\omega_y(t+T)] \\
T_{21}(t+T) &= T_{21}(t) + \frac{T}{2} [T_{31}(t)\omega_x(t) - T_{11}(t)\omega_z(t) + Y_{31}\omega_x(t+T) - Y_{11}\omega_z(t+T)] \\
T_{31}(t+T) &= T_{31}(t) + \frac{T}{2} [T_{11}(t)\omega_y(t) - T_{21}(t)\omega_x(t) + Y_{11}(t)\omega_y(t+T) - Y_{21}\omega_x(t+T)] \\
T_{12}(t+T) &= T_{12}(t) + \frac{T}{2} [T_{22}(t)\omega_z(t) - T_{32}(t)\omega_y(t) + Y_{22}\omega_x(t+T) - Y_{32}\omega_y(t+T)] \\
T_{22}(t+T) &= T_{22}(t) + \frac{T}{2} [T_{32}(t)\omega_x(t) - T_{12}(t)\omega_z(t) + Y_{32}\omega_x(t+T) - Y_{12}\omega_z(t+T)] \\
T_{32}(t+T) &= T_{32}(t) + \frac{T}{2} [T_{12}(t)\omega_y(t) - T_{22}(t)\omega_x(t) + Y_{12}\omega_y(t+T) - Y_{22}\omega_x(t+T)] \\
T_{13}(t+T) &= T_{13}(t) + \frac{T}{2} [T_{23}(t)\omega_z(t) - T_{33}(t)\omega_y(t) + Y_{23}\omega_x(t+T) - Y_{33}\omega_y(t+T)] \\
T_{23}(t+T) &= T_{23}(t) + \frac{T}{2} [T_{33}(t)\omega_x(t) - T_{13}(t)\omega_z(t) + Y_{33}\omega_x(t+T) - Y_{13}\omega_z(t+T)] \\
T_{33}(t+T) &= T_{33}(t) + \frac{T}{2} [T_{13}(t)\omega_y(t) - T_{23}(t)\omega_x(t) + Y_{13}\omega_y(t+T) - Y_{23}\omega_x(t+T)]
\end{aligned} \tag{3-77}$$

先计算 Y_{ii} ，然后计算 $T_{ii}(t+T)$ ，从(3-77)式可以看出，二阶龙格—库塔法不仅需要 t 时刻的角速度 $\omega_i(t)$ ($i=x, y, z$)。而且需要知道 $t+T$ 时刻的角速度 $\omega_i(t+T)$ 。显然，在 ω_i 为常值的情况下 $\omega_i(t)T = \omega_i(t+T)T = \Delta\theta$ ，即二阶龙格—库塔法也可以用陀螺输出的角增量来计算，当 $\omega_i(t)$ 随时间变化时，则不能直接用陀螺输出的角增量，而必须从陀螺的角增量输出中提取出角速度信号。关于角速度信号的提取，我们在下一节介绍。

二阶龙格—库塔法也可以写成下列形式：

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} &= T f[\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\omega}(t)] \\
\mathbf{Y} &= \mathbf{X}(t) + \mathbf{K} \\
\mathbf{P} &= T f[\mathbf{Y}, \boldsymbol{\omega}(t+T)] \\
\mathbf{X}(t+T) &= \mathbf{X}(t) + \frac{1}{2}(\mathbf{K} + \mathbf{P})
\end{aligned} \tag{3-78}$$

用四阶龙格—库塔法解四元数微分方程可得

$$\begin{aligned}
k_0 &= \frac{T}{2} [-\omega_x(t)q_1(t) - \omega_y(t)q_2(t) - \omega_z(t)q_3(t)] \\
k_1 &= \frac{T}{2} [\omega_x(t)q_0(t) + \omega_y(t)q_2(t) - \omega_z(t)q_3(t)] \\
k_2 &= \frac{T}{2} [\omega_y(t)q_0(t) - \omega_x(t)q_1(t) - \omega_z(t)q_3(t)] \\
k_3 &= \frac{T}{2} [\omega_z(t)q_0(t) + \omega_y(t)q_1(t) - \omega_x(t)q_2(t)]
\end{aligned} \tag{3-79}$$

$$\left. \begin{aligned} Y_0 &= q_0(t) + k_0 \\ Y_1 &= q_1(t) + k_1 \\ Y_2 &= q_2(t) + k_2 \\ Y_3 &= q_3(t) + k_3 \end{aligned} \right\} \quad (3-80)$$

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= \frac{T}{2} [-\omega_x(t+T)Y_1 - \omega_y(t+T)Y_2 - \omega_z(t+T)Y_3] \\ P_1 &= \frac{T}{2} [\omega_x(t+T)Y_0 + \omega_z(t+T)Y_2 - \omega_y(t+T)Y_3] \\ P_2 &= \frac{T}{2} [\omega_y(t+T)Y_0 - \omega_z(t+T)Y_1 - \omega_x(t+T)Y_3] \\ P_3 &= \frac{T}{2} [\omega_z(t+T)Y_0 + \omega_y(t+T)Y_1 - \omega_x(t+T)Y_2] \end{aligned} \right\} \quad (3-81)$$

$$\left. \begin{aligned} q_0(t+T) &= q_0(t) + \frac{1}{2}(k_0 + P_0) \\ q_1(t+T) &= q_1(t) + \frac{1}{2}(k_1 + P_1) \\ q_2(t+T) &= q_2(t) + \frac{1}{2}(k_2 + P_2) \\ q_3(t+T) &= q_3(t) + \frac{1}{2}(k_3 + P_3) \end{aligned} \right\} \quad (3-82)$$

3. 四阶龙格—库塔法

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= f[\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\omega}(t)] \\ k_1 &= T f[\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\omega}(t)] \\ k_2 &= T f\left[\mathbf{X}(t) + \frac{k_1}{2}, \boldsymbol{\omega}\left(t + \frac{T}{2}\right)\right] \\ k_3 &= T f\left[\mathbf{X}(t) + \frac{k_2}{2}, \boldsymbol{\omega}\left(t + \frac{T}{2}\right)\right] \\ k_4 &= T f[\mathbf{X}(t) + k_3, \boldsymbol{\omega}(t+T)] \\ \mathbf{X}(t+T) &= \mathbf{X}(t) + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \end{aligned} \right\} \quad (3-83)$$

把四阶龙格—库塔法应用在姿态矩阵微分方程

$$\dot{\mathbf{C}}_b^a(t) = \mathbf{C}_b^a(t) \boldsymbol{\omega}_{nb}^b(t)$$

则有

$$\begin{aligned}
 k_1 &= T C_b^a(t) \omega_{ab}^{ba}(t) \\
 k_2 &= T \left\{ \left[C_b^a(t) + \frac{k_1}{2} \right] \omega_{ab}^{ba} \left(t + \frac{T}{2} \right) \right\} \\
 k_3 &= T \left\{ \left[C_b^a(t) + \frac{k_2}{2} \right] \omega_{ab}^{ba} \left(t + \frac{T}{2} \right) \right\} \\
 k_4 &= T \{ [C_b^a(t) + k_3] \omega_{ab}^{ba}(t+T) \} \\
 C_b^a(t+T) &= C_b^a(t) + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]
 \end{aligned} \tag{3-84}$$

(3-84)式是矩阵方程的形式，如果展开写成元素方程的形式，每个式子都有九个方程，则共 45 个式子。由于较繁，这里就不列写了。

对四元数微分方程

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{2} [\omega_b(t)] q(t)$$

则有

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{T}{2} [\omega_b(t)] q(t) \\
 k_2 &= \frac{T}{2} \left[\omega_b \left(t + \frac{T}{2} \right) \right] \left(q(t) + \frac{k_1}{2} \right) \\
 k_3 &= \frac{T}{2} \left[\omega_b \left(t + \frac{T}{2} \right) \right] \left(q(t) + \frac{k_2}{2} \right) \\
 k_4 &= \frac{T}{2} [\omega_b(t+T)] (q(t) + k_3) \\
 q(t+T) &= q(t) + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned} \tag{3-85}$$

写成元素的形式为

$$\begin{aligned}
 k_{10} &= \frac{T}{2} [-\omega_x(t)q_1(t) - \omega_y(t)q_2(t) - \omega_z(t)q_3(t)] \\
 k_{11} &= \frac{T}{2} [\omega_x(t)q_0(t) + \omega_z(t)q_2(t) - \omega_y(t)q_3(t)] \\
 k_{12} &= \frac{T}{2} [\omega_y(t)q_0(t) - \omega_z(t)q_1(t) - \omega_x(t)q_3(t)] \\
 k_{13} &= \frac{T}{2} [\omega_z(t)q_0(t) + \omega_y(t)q_1(t) - \omega_x(t)q_2(t)] \\
 A_0 &= q_0(t) + \frac{k_{10}}{2} \\
 A_1 &= q_1(t) + \frac{k_{11}}{2} \\
 A_2 &= q_2(t) + \frac{k_{12}}{2} \\
 A_3 &= q_3(t) + \frac{k_{13}}{2}
 \end{aligned}$$

$$k_{20} = \frac{T}{2} \left[-\omega_x \left(t + \frac{T}{2} \right) A_1 - \omega_y \left(t + \frac{T}{2} \right) A_2 - \omega_z \left(t + \frac{T}{2} \right) A_3 \right]$$

$$k_{21} = \frac{T}{2} \left[\omega_x \left(t + \frac{T}{2} \right) A_0 + \omega_z \left(t + \frac{T}{2} \right) A_2 - \omega_y \left(t + \frac{T}{2} \right) A_3 \right]$$

$$k_{22} = \frac{T}{2} \left[\omega_y \left(t + T \right) A_0 + \omega_z \left(t + \frac{T}{2} \right) A_1 - \omega_x \left(t + \frac{T}{2} \right) A_3 \right]$$

$$k_{23} = \frac{T}{2} \left[\omega_z \left(t + T \right) A_0 + \omega_y \left(t + \frac{T}{2} \right) A_1 - \omega_x \left(t + \frac{T}{2} \right) A_2 \right]$$

$$B_0 = q_0(t) + \frac{k_{20}}{2}$$

$$B_1 = q_1(t) + \frac{k_{21}}{2}$$

$$B_2 = q_2(t) + \frac{k_{22}}{2}$$

$$B_3 = q_3(t) + \frac{k_{23}}{2}$$

$$k_{30} = \frac{T}{2} \left[-\omega_x \left(t + \frac{T}{2} \right) B_1 - \omega_y \left(t + \frac{T}{2} \right) B_2 - \omega_z \left(t + \frac{T}{2} \right) B_3 \right]$$

$$k_{31} = \frac{T}{2} \left[\omega_x \left(t + \frac{T}{2} \right) B_0 + \omega_z \left(t + \frac{T}{2} \right) B_2 - \omega_y \left(t + \frac{T}{2} \right) B_3 \right]$$

$$k_{32} = \frac{T}{2} \left[\omega_y \left(t + \frac{T}{2} \right) B_0 - \omega_z \left(t + \frac{T}{2} \right) B_1 - \omega_x \left(t + \frac{T}{2} \right) B_3 \right]$$

$$k_{33} = \frac{T}{2} \left[\omega_z \left(t + \frac{T}{2} \right) B_0 + \omega_y \left(t + \frac{T}{2} \right) B_1 - \omega_x \left(t + \frac{T}{2} \right) B_2 \right]$$

$$C_0 = q_0(t) + k_{30}$$

$$C_1 = q_1(t) + k_{31}$$

$$C_2 = q_2(t) + k_{32}$$

$$C_3 = q_3(t) + k_{33}$$

$$k_{40} = \frac{T}{2} \left[-\omega_x(t+T)C_1 - \omega_y(t+T)C_2 - \omega_z(t+T)C_3 \right]$$

$$k_{41} = \frac{T}{2} \left[\omega_x(t+T)C_0 + \omega_z(t+T)C_2 - \omega_y(t+T)C_3 \right]$$

$$k_{42} = \frac{T}{2} \left[\omega_y(t+T)C_0 - \omega_z(t+T)C_1 - \omega_x(t+T)C_3 \right]$$

$$k_{43} = \frac{T}{2} \left[\omega_z(t+T)C_0 + \omega_y(t+T)C_1 - \omega_x(t+T)C_2 \right]$$

$$q_0(t+T) = q_0(t) + \frac{1}{6} (k_{10} + 2k_{20} + 2k_{30} + k_{40})$$

$$q_1(t+T) = q_1(t) + \frac{1}{6} (k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})$$

$$q_2(t+T) = q_2(t) + \frac{1}{6} (k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42})$$

$$q_3(t+T) = q_3(t) + \frac{1}{6} (k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43})$$

求出四元数的四个元之后，则可以按照(3—28)式四元数和方向余弦元素之间的关系求出姿态矩阵。

上述各种算法在实际应用中，要根据导航系统的精度要求和所采用的计算机的性能来选取，通常要经过大量的模拟计算来确定。姿态矩阵的计算较多的采用四元数法的四阶算法，而位置矩阵，由于变化速度不快，可以采用方向余弦法的一阶算法。

§ 3—4 姿态航向信息和角速度信息的提取

姿态和航向信息是导航参数的一部份，同时也是飞行控制系统所需要的最基本的控制信号，而飞行器绕机体坐标系轴向的角速度同样也是控制系统所需要的信息。另外利用龙格—库塔法求解姿态矩阵或姿态四元数微分方程时，也需要角速度信息，而捷联式陀螺的输出则是角增量 $\Delta\theta$ ，角速度信息就是从 $\Delta\theta$ 中提取。这一节我们讨论这些控制信息的提取方法。

一、姿态和航向信息的提取

姿态和航向信息是从姿态矩阵的元素中提取。按(1—6)式有

$$\left. \begin{aligned} \theta &= -\sin^{-1}(T_{13}) \\ \psi &= \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{T_{12}}{T_{11}}\right) \\ \gamma &= \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{T_{23}}{T_{33}}\right) \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

俯仰角 θ 定义在 ± 90 度区间，和反正弦函数的主值一致，不存在多值问题。倾斜角 γ 定义在 ± 180 度区间，航向角 ψ 定义在 $0\sim 360$ 度，故都存在多值问题，算出主值之后，还要判断是在那一个象限，且反正切函数存在着奇点，在 ψ 和 γ 接近 90 度时，反正切函数趋向无穷，使计算溢出。

倾斜角 γ 的真值可根据 T_{23} 和 T_{33} 的符号来确定，其判断方法如表3—3。计算机程序框图见图(3—12)。

表3—3 γ 真的判断

T_{33}	T_{23}	$\gamma_{真}$	象 限
> 0	+	$\frac{\pi}{2}$	
> 0	-	$-\frac{\pi}{2}$	
+	+	$\gamma_{主}$	$(0, 90^\circ)$
+	-	$\gamma_{主}$	$(0, -90^\circ)$
-	+	$\gamma_{主} + 180^\circ$	$(90^\circ, 180^\circ)$
-	-	$\gamma_{主} - 180^\circ$	$(180^\circ, 270^\circ)$

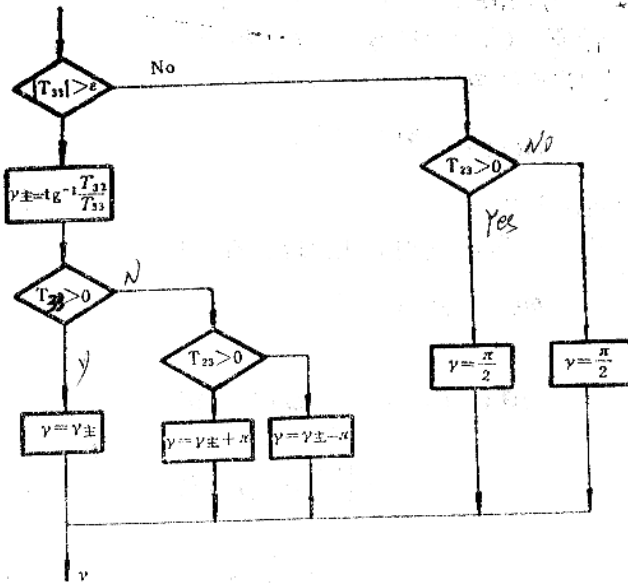


图3-12 俯仰角计算框图

航向角 ψ 定义在 $0\sim 360$ 度，其真值可根据 T_{12} 和 T_{11} 的符号来判断，其判断方法如表3-4，计算机程序框图如图(3-13)。

表3-4 ψ 真的判断

T_{11}	T_{12}	ψ 真	象限
$\rightarrow 0$	+	90°	
$\rightarrow 0$	-	270°	
+	+	$\psi_{主}$	$(0, 90^\circ)$
+	-	$360^\circ + \psi_{主}$	$(-90^\circ, 0)$
-	+	$180^\circ + \psi_{主}$	$(90^\circ, 180^\circ)$
-	-	$180^\circ + \psi_{主}$	$(180^\circ, 270^\circ)$

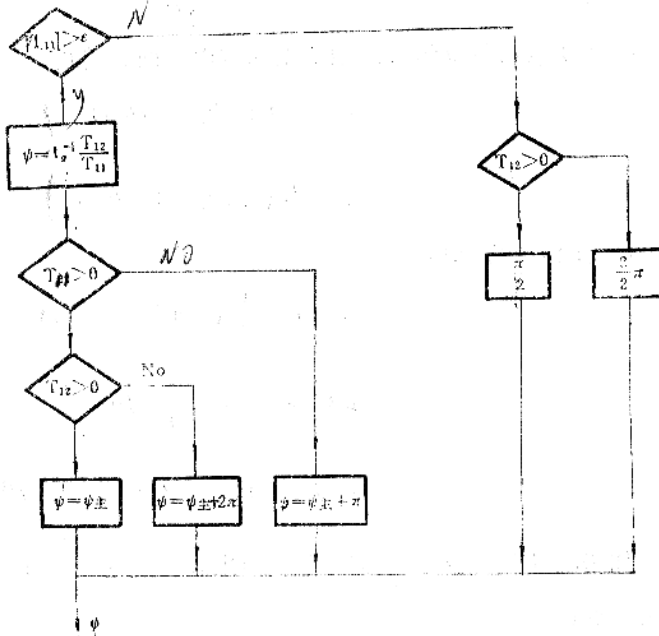


图3-13 航向角 ψ 计算框图

二、角速度信息提取

角速度信息提取，就是从陀螺输出的角增量中提取角速度信息，由于飞行器的角速度是随

时间变化的，其变化规律是不确定的，因此，速率的提取只能是近似的。在姿态矩阵的计算中，由于采样周期 T 通常很小(如0.025秒)，故角速度可近似看成是不变的或直线增长的。如果在采样周期 T 内，把角速度 ω 看成是常值，则

$$\omega(t) = \frac{\Delta\theta(t, t+T)}{T} \quad (3-86)$$

(3-86)式称一阶角速率提取。

如果在采样周期 T 内，认为 ω 是随时间线性增长的，表示为

$$\omega(t+\xi) = \alpha + \beta\xi \quad (3-87)$$

则

$$\begin{aligned} \Delta\theta_i(t, t+\xi) &= \int_t^{t+\xi} \omega_i(t+\xi) d\xi \\ &= \int_t^{t+\xi} (\alpha + \beta\xi) d\xi \\ &= \alpha\xi + \frac{1}{2}\beta\xi^2 \end{aligned} \quad (3-88)$$

若陀螺从 t 到 $t+\frac{T}{2}$ 时的输出角增量为 $\Delta\theta_{i1}$ ，从 t 到 $t+T$ 时的输出角增量为 $\Delta\theta_{i2}$ ，则

$$\Delta\theta_{i1} = \alpha \frac{T}{2} + \frac{1}{2}\beta \left(\frac{T}{2}\right)^2$$

$$\Delta\theta_{i2} = \alpha T + \frac{1}{2}\beta T^2$$

假设 $\Delta\theta_i(t)$ 复位到零，则联立求解以上两式可得

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{T} (4\Delta\theta_{i1} - \Delta\theta_{i2}) \\ \beta &= \frac{1}{T^2} (4\Delta\theta_{i2} - 8\Delta\theta_{i1}) \end{aligned} \right\} \quad (3-89)$$

代入(3-87)式得

$$\left. \begin{aligned} \omega_i(t) &= \frac{1}{T} (4\Delta\theta_{i1} - \Delta\theta_{i2}) \\ \omega_i\left(t + \frac{T}{2}\right) &= \frac{1}{T} \Delta\theta_{i2} \\ \omega_i(t+T) &= \frac{1}{T} (3\Delta\theta_{i2} - 4\Delta\theta_{i1}) \end{aligned} \right\} \quad (3-90)$$

如果陀螺从 t 到 $t+\frac{T}{2}$ 时输出为 $\Delta\theta'_{i1}$ ，从 $t+\frac{T}{2}$ 到 T 时输出为 $\Delta\theta'_{i2}$ ，在 $t+\frac{T}{2}$ 时重新置零，此时：

$$\Delta\theta'_{i1} = \Delta\theta_{i1}$$

$$\Delta\theta_{i2} = \Delta\theta'_{i1} + \Delta\theta'_{i2}$$

代入(3-90)式则得到

$$\left. \begin{aligned} \omega_i(t) &= \frac{1}{T}(3\Delta\theta'_{i1} - \Delta\theta'_{i2}) \\ \omega_i\left(t + \frac{T}{2}\right) &= \frac{1}{T}(\Delta\theta'_{i1} + \Delta\theta'_{i2}) \\ \omega_i(t+T) &= \frac{1}{T}(3\Delta\theta'_{i2} - \Delta\theta'_{i1}) \end{aligned} \right\} \quad (3-91)$$

(3-90)和(3-91)式叫作二阶角速度提取。在采用四阶龙格-库塔法进行姿态矩阵的数值计算时，常用(3-91)式。

第四章 捷联式惯导系统的程序编排

捷联式惯导系统是一个信息处理系统，把捷联式惯性仪表输出的信息用计算机处理成导航和控制信息，这个处理过程是用计算机程序来实现的。在平台式惯导系统中，导航平台可以模拟不同的坐标系，有空间稳定的惯导系统和各种水平稳定的惯导系统，和这些平台式系统对应的捷联式系统则是用相应的程序编排来实现的。这一章就是介绍这些捷联式惯导系统的程序编排。在捷联式惯导系统中应用的陀螺仪，按其功能来分有两类，一类是速率陀螺，如单自由度液浮陀螺、挠性陀螺、激光陀螺等，这些陀螺都是测量飞行器角速度的。另一类陀螺如静电陀螺，则是测量角位置的，叫作位置陀螺。用位置陀螺的捷联惯导系统在第四节介绍。前三节则是介绍用速率型陀螺仪的捷联式系统。

§ 4—1 用惯性坐标系的捷联式惯导系统

用惯性坐标系的捷联式惯性系统相应于空间稳定的平台式惯导系统。在空间稳定的平台式惯导系统中，导航加速度计被稳定在惯性坐标系轴向，其测量的比力经引力补偿后，进行两次积分即可得到飞行器在惯性坐标系内的位置矢量，然后可以把这个位置矢量转换成需要的导航信息，系统原理见图(4—1)。在捷联式惯导系统中，导航加速度计是固联在机体坐标系上的，它测量的是机体坐标系轴向的比力 f^b ，如果把把这个比力变换到惯性坐标系即

$$f^i = C_b^i f^b$$

则其他的计算就和空间稳定的平台式惯导系统一样了，系统原理见图(4—2)。

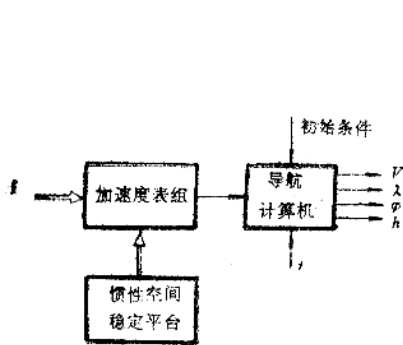


图4—1 空间稳定平台式惯导系统

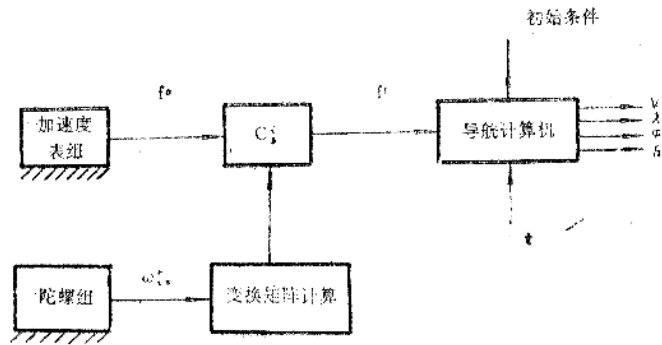


图4—2 用惯性坐标系的捷联式惯导系统

一、变换矩阵的计算

在用惯性坐标系的捷联式惯导系统中，变换矩阵就是 C_b^i ，即机体坐标系和惯性坐标系之间的变换矩阵。这个矩阵可用解矩阵微分方程得到即

$$\dot{C}_b^i = C_b^i \omega_b^{b^i}$$

式中, ω_b^i 即为陀螺测量的飞行器相对惯性空间的角速度的反对称形式。由于这个角速度随时间变化很快, 因此, 上述矩阵微分方程必须以很高的速度计算, 为了减小计算量, 通常用四元数法, 即解四元数微分方程

$$\dot{Q}(q) = \frac{1}{2} M^*(\omega_b) Q(q)$$

然后用四元数和方向余弦矩阵的关系求出 C_b^i 。机上执行算法可用 § 3—3 介绍的任一种方法。

二、惯性坐标系中的加速度

根据牛顿定律, 加速度计的输出正比于飞行器的惯性加速度和地心引力加速度之差 (忽略其他星体的引力加速度, 产生的误差低于 $10^{-7}g$), 用公式表示为

$$\ddot{R}^i = C_b^i f^b + G^i \quad (4-1)$$

式中 \ddot{R}^i ——计算的惯性加速度。

R^i ——飞行器在地心惯性坐标系中的位置矢量。

G^i ——计算的地球引力加速度。

三、引力加速度的计算

在地心惯性坐标系中, 引力加速度可按式计算 (见附录三 c—34 式):

$$G^i = -\frac{\mu}{R^3} \begin{bmatrix} \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_c}{R} \right)^2 \left[1 - 5 \left(\frac{\hat{r}_z}{R} \right)^2 \right] \right\} \hat{r}_x \\ \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_c}{R} \right)^2 \left[1 - 5 \left(\frac{\hat{r}_z}{R} \right)^2 \right] \right\} \hat{r}_y \\ \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_c}{R} \right)^2 \left[3 - 5 \left(\frac{\hat{r}_z}{R} \right)^2 \right] \right\} \hat{r}_z \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

式中 μ ——地球质量和万有引力常数的乘积。

$$\mu = (3.9860305 \pm 0.0000003) \times 10^{14} \text{ 米}^3/\text{秒}^2$$

$$R_c = 6378165 \pm 25 \text{ 米} \quad \text{地球赤道半径。}$$

$$J_2 = (1.08230 \pm 0.00020) \times 10^{-3} \text{ 常数。}$$

R ——地心位置矢量的大小。

用这个数学模型计算地心引力加速度, 赤道分量的最大误差在纬度 $\varphi_0 = 65^\circ$ 处为 $1.2 \times 10^{-5}g$, 最大的极轴分量误差在两极, 等于 $2.0 \times 10^{-5}g$ 。因此, 在使用分辨率为 $10^{-5}g$ 的加速度计时, 上述引力数学模型是完全可用的。

在 (4—2) 式中 R 即地心位置矢量的计算, 如果用惯导系统计算的地心位置矢量 \hat{R}^i , 则导航系统是发散的, 因为纯惯导系统的高度回路是不稳定的。因此需要引进外部高度信息。如果用 \hat{h} 表示高度表测量的高度, 则

$$R_0 = \hat{R}_0 + \hat{h} \quad (4-3)$$

式中

$$R_0 = R_e \left[1 - e \left(\frac{r_z}{R_0} \right)^2 \right] \quad \text{地球半径} \quad (4-4)$$

$$e = \frac{1}{298.30} \quad \text{地球的椭圆度}$$

惯性系统计算的地心位置矢量大小为

$$R_i = (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{\frac{1}{2}}$$

(4-2)式中的 \hat{R}^3 通常用 R_i 和 R_o 的非线性组合来估计

$$\hat{R}^3 = (R_o)^K (R_i)^{3-K} \quad (4-4)$$

式中 K 为加权因子。为了保证系统不发散，通常 $K \geq 2$ 。

方程(4-2)中二阶小量中的 $\frac{R_o}{R}$ 和 $\frac{\hat{r}_z}{\hat{R}}$ 中的 R ，一律用 R_o 代替，则(4-2)式可改写为

$$G^i = - \frac{\mu}{(R_o)^K (R_i)^{3-K}} \begin{pmatrix} \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_o}{R_o} \right)^2 \left[1 - 5 \left(\frac{\hat{r}_z}{R_o} \right)^2 \right] \right\} \hat{r}_x \\ \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_o}{R_o} \right)^2 \left[1 - 5 \left(\frac{\hat{r}_z}{R_o} \right)^2 \right] \right\} \hat{r}_y \\ \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_o}{R_o} \right)^2 \left[3 - 5 \left(\frac{\hat{r}_z}{R_o} \right)^2 \right] \right\} \hat{r}_z \end{pmatrix} \quad (4-5)$$

四、速度计算

对相对地球定位的惯导系统，需要计算的速度信息也是相对地球的，通常叫作地速，即飞行器在地球坐标系中的位置矢量的时间变化率即

$$\mathbf{v}^e \triangleq \dot{\mathbf{R}}^e \quad (4-6)$$

式中 \mathbf{v}^e 表示飞行器相对地球的速度。

如果把 \mathbf{v}^e 表示在地理坐标系内，则

$$\mathbf{v}^n = \mathbf{C}_n^e \dot{\mathbf{R}}^e \quad (4-7)$$

$$\mathbf{v}^n = [V_N, V_E, V_D]^T$$

由
故

$$\mathbf{R}^i = \mathbf{C}_i^e \mathbf{R}^e$$

$$\dot{\mathbf{R}}^i = \mathbf{C}_i^e \dot{\mathbf{R}}^e + \dot{\mathbf{C}}_i^e \mathbf{R}^e$$

$$= \mathbf{C}_i^e \dot{\mathbf{R}}^e + \mathbf{C}_i^e \boldsymbol{\omega}_{ie}^i \mathbf{R}^e$$

$$= \mathbf{C}_i^e \dot{\mathbf{R}}^e + \mathbf{C}_i^e \boldsymbol{\omega}_{ie}^i \mathbf{C}_i^e \mathbf{R}^i$$

$$= \mathbf{C}_i^e \dot{\mathbf{R}}^e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^i \mathbf{R}^i$$

$$= \mathbf{C}_n^i \mathbf{C}_n^e \dot{\mathbf{R}}^e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^i \mathbf{R}^i$$

$$= \mathbf{C}_n^i \mathbf{v}^n + \boldsymbol{\omega}_{ie}^i \mathbf{R}^i$$

即

$$\mathbf{v}^n = \mathbf{C}_n^i (\dot{\mathbf{R}}^i - \boldsymbol{\omega}_{ie}^i \mathbf{R}^i) \quad (4-8)$$

式中 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^i$ 为地球自转角速度在惯性坐标系轴向的分量构成的反对称阵。

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^i = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{ie} & 0 \\ \omega_{ie} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_n^i = \mathbf{C}_n^e \mathbf{C}_i^e$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} -\sin\varphi \cos\lambda & -\sin\varphi \sin\lambda & \cos\varphi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\cos\varphi \cos\lambda & -\cos\varphi \sin\lambda & -\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega_{ie}t & \sin\omega_{ie}t & 0 \\ -\sin\omega_{ie}t & \cos\omega_{ie}t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin\varphi \cos(\lambda+\omega_{ie}t) & -\sin\varphi \sin(\lambda+\omega_{ie}t) & \cos\varphi \\ -\sin(\lambda+\omega_{ie}t) & \cos(\lambda+\omega_{ie}t) & 0 \\ -\cos\varphi \cos(\lambda+\omega_{ie}t) & -\cos\varphi \sin(\lambda+\omega_{ie}t) & -\sin\varphi \end{pmatrix} \quad (4-9)
\end{aligned}$$

显然, ω_{ie} 是已知的, 这个矩阵可以用位置信息 λ 和 φ 构成。

五、位置计算

地理纬度 φ 和地心纬度 φ_e 的关系为

$$\varphi = \varphi_e + D$$

$$\varphi_e = \sin^{-1} \frac{\hat{r}_z}{\hat{R}}$$

$$D \approx e \sin 2\varphi \quad \text{垂线偏差 (附录三 c-7 式)}$$

$$e = \frac{R_e - R_p}{R_e} \quad \text{地球扁率}$$

$$R_p \text{——地球极轴半径}$$

$$\text{故} \quad \hat{\varphi} = \sin^{-1} \frac{\hat{r}_z}{\hat{R}} + e \sin 2\hat{\varphi} \quad (4-10)$$

(4-10)式中同样存在着 \hat{R} 如何计算的问题, 类似(4-4)式可采用加权非线性估计的方法来计算, 即

$$\hat{R} = (R_0)^\alpha (R_i)^{1-\alpha} \quad (4-11)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

用不同的 α 值计算 R , 将影响误差传播特性。通常可以取 $\alpha=0$, 即用惯性系统计算的 \hat{R}_i 代替(4-10)式中的 \hat{R} 。

飞行器所处地理位置的子午面和惯性坐标系 x_i, y_i 平面的夹角 λ_i 叫黄经。

$$\lambda_i = \sin^{-1} \frac{\hat{r}_y}{(\hat{r}_x^2 + \hat{r}_y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \omega_{ie}t + \lambda$$

$$\text{故} \quad \lambda = \sin^{-1} \frac{\hat{r}_y}{(r_x^2 + r_y^2)^{\frac{1}{2}}} - \omega_{ie}t \quad (4-12)$$

惯性系统指示的高度是惯性系统计算的地心位置矢量和地球半径的差值。即

$$\hat{h} = \hat{R}_i - R_0$$

$$\text{由} \quad R_0 = R_e \left[1 - e \left(\frac{r_z}{R_0} \right)^2 \right]$$

$$\text{故} \quad \hat{h} = \hat{R}_i - R_e \left[1 - e \left(\frac{\hat{r}_z}{\hat{R}_0} \right)^2 \right] \quad (4-13)$$

六、姿态和航向的计算

由变换矩阵的计算得到 C_i^b ，根据计算的经纬度 λ 和 φ 可以构成矩阵 C_i^z (见 4—9 式)，故姿态矩阵可按式算出

$$C_i^z = C_i^b C_i^z \quad (4-14)$$

姿态角和航向角则可以从姿态矩阵的元素中提取出来，具体计算方法如 § 3—4 节所述。用惯性坐标系的捷联式惯导系统程序编排如图 (4—3)。

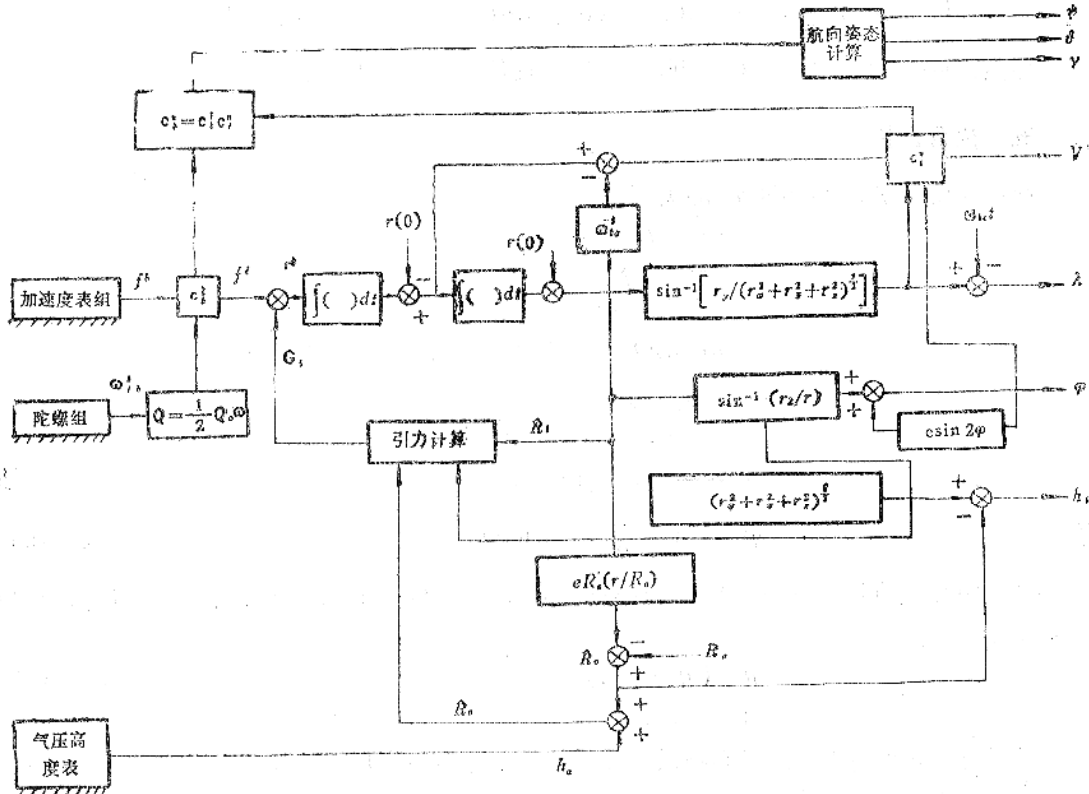


图4—3 用惯性坐标系的捷联式惯导系统程序编排

在图 (4—3) 的程序编排中,变换矩阵的计算是用角速度信息的,如第三章所述,捷联式陀螺的输出是角增量,因此,系统中还必须包括角速度信息提取程序。如果变换矩阵的计算是用增量算法则可以省掉角速度信息提取程序。

§ 4—2 用地理坐标系的捷联式惯导系统

在地球附近飞行的飞行器上,多数都是采用地平坐标系作为导航坐标系,这样可以避免引力补偿问题,特别是平台式惯性导航系统。由于导航平台把陀螺和加速度计稳定在地平坐标系,使重力相对仪表的方位基本不变,从而便于补偿惯性仪表与 g 有关的误差,提高仪表精度。在地平坐标系中最典型的是地理坐标系,即导航平台模拟的是地理坐标系,系统原理如图 (4—4)。由于导航加速度计被稳定在地理坐标系,所以加速度计测量的就是沿地理坐标

系轴向的比力。可以直接利用这个信息进行导航计算。和这种平台式系统相对应的捷联式系统原理如图(4—5)。用捷联式陀螺仪测量的角速度 $\omega_{i,b}^b$ ，和导航计算机计算的角速度 $\omega_{i,n}^n$ ，

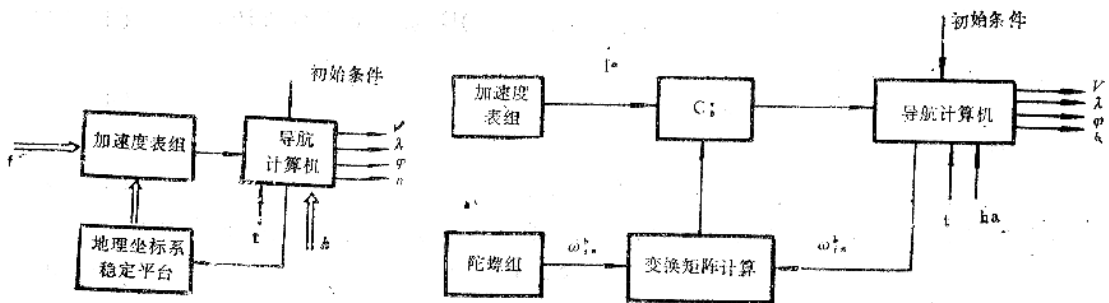


图4—4 地理坐标系的平台式惯导系统

图4—5 用地理坐标系的捷联式惯导系统

来计算飞行器的姿态矩阵 C_i^b ，然后，从姿态矩阵的元素中提取飞行器的姿态和航向信息，并把捷联式加速度计测量的比力信息 f^b 用 C_i^b 变换到导航坐标系得到 f^n ，然后和平台式惯导系统一样进行导航计算。

一、姿态矩阵的计算

姿态矩阵的计算，上一章已作了详细的介绍，通常都是采用四元数的方法，求出姿态四元数后，用四元数和姿态矩阵元素的对应关系，得到姿态矩阵，如果采用对四元数微分方程进行数值积分算法，则由于捷联式陀螺的输出是角增量，所以，还必需要有一个角速率信息的提取程序。如果采用增量算法，则角速率提取程序可以省掉。角速率提取通常采用二阶提取即可。

二、速度计算

飞行器位置矢量 R 在惯性坐标系中的表示为 R^i ，在地球坐标系中的表示为 R^e 。 R^i 和 R^e 的变换关系为

$$R^e = C_i^e R^i$$

求导得

$$\begin{aligned} \dot{R}^e &= \dot{C}_i^e R^i + \dot{C}_i^e R^i \\ &= \dot{C}_i^e (\dot{R}^i + C_i^e \dot{C}_i^e R^i) \end{aligned}$$

由

$$\dot{C}_i^e = -C_i^e \omega_{i,e}^e$$

故

$$\dot{R}^e = C_i^e (\dot{R}^i - \omega_{i,e}^e R^i) \quad (4-15)$$

式中 \dot{R}^e 即飞行器相对地球的运动速度列矢量。

我们把 \dot{R}^e 表示在地理坐标系，定义

$$V^e \triangleq C_i^e \dot{R}^e \quad (4-16)$$

将(4—15)式代入得

$$\begin{aligned} V^e &= C_i^e C_i^e (\dot{R}^i - \omega_{i,e}^e R^i) \\ &= C_i^e (\dot{R}^i - \omega_{i,e}^e R^i) \end{aligned}$$

两边求导得

$$\dot{V}^n = C_n^i (\ddot{R}^i - \omega_{ie}^i \dot{R}^i) + \dot{C}_n^i (\dot{R}^i - \omega_{ie}^i R^i)$$

利用(4-15)和(4-16)式对上式稍作换得

$$\dot{V}^n = C_n^i [\ddot{R}^i - (\omega_{ie}^i + 2\omega_{ie}^i) C_n^i V^n - \omega_{ie}^i \omega_{ie}^i R^i] \quad (4-17)$$

表示在地理坐标系中的比力为

$$f^n = C_n^i \ddot{R}^i - G^n \quad (4-18)$$

考虑地球重力为

$$g \triangleq G - \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times R) \quad (4-19)$$

把(4-17), (4-19)式代入(4-18)则得到沿地理坐标系轴向的比力为

$$f^n = \dot{V}^n + (\omega_{ie}^n + 2\omega_{ie}^n) V^n - g^n \quad (4-20)$$

式中

$$f^n = [f_N \ f_E \ f_D]^T$$

$$(\omega_{ie}^n + 2\omega_{ie}^n) = [\lambda + 2\omega_{ie} \cos\varphi \quad -\dot{\varphi} \quad -(\lambda + 2\omega_{ie}) \sin\varphi]^T$$

$$g^n = [0 \ 0 \ g]^T$$

捷联式加速度计测量的是沿机体坐标系的比力 f^b , 经姿态矩阵的变换得 f^n 即

$$f^n = C_n^b f^b$$

按(4-20)式有

$$\dot{V}^n = f^n - (\omega_{ie}^n + 2\omega_{ie}^n) V^n + g^n \quad (4-21)$$

即

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_N \\ \dot{V}_E \\ \dot{V}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_N \\ f_E \\ f_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -(\lambda + 2\omega_{ie}) \sin\varphi & +\dot{\varphi} \\ +(\lambda + 2\omega_{ie}) \sin\varphi & 0 & (\lambda + 2\omega_{ie}) \cos\varphi \\ -\dot{\varphi} & -(\lambda + 2\omega_{ie}) \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}$$

展开得

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_N &= f_N - (\lambda + 2\omega_{ie}) \sin\varphi V_E + \dot{\varphi} V_D \\ \dot{V}_E &= f_E + (\lambda + 2\omega_{ie}) \sin\varphi V_N + (\lambda + 2\omega_{ie}) \cos\varphi V_D \\ \dot{V}_D &= f_D - \dot{\varphi} V_N - (\lambda + 2\omega_{ie}) \cos\varphi V_E + g \end{aligned} \right\} \quad (4-22)$$

联立求解这三个微分方程给出 V_N , V_E 和 V_D 三个速度信息。在机上计算时, 可用一阶龙格-库塔法。

三、重力计算

地球的重力解析式为

$$g_e = \frac{\mu}{R^2} \left[1 - \frac{3}{4} J_2 (1 - 3 \cos^2\varphi) \right] - R \omega_{ie}^2 \cos\varphi \cos\varphi \quad (\text{附录三 c-37式})$$

式中 R^2 的处理同样可以用 R_i 和 R_e 的非线性组合来估计, 即

$$\hat{R}^2 = (\hat{R}_e)^K (\hat{R}_i)^{2-K} \quad (4-23)$$

代入上式得

$$\hat{g}_e = \frac{\mu}{(\hat{R}_e)^K (\hat{R}_i)^{2-K}} \left[1 - \frac{3}{4} J_2 (1 - 3 \cos\varphi) \right] - \hat{R}_e \omega_{ie}^2 \cos\varphi \cos\varphi \quad (4-24)$$

式中 $\hat{R}_0 = \hat{R}_0 + \hat{h}$
 $R_0 = R_e(1 - e \sin^2 \phi_e)$

$$\hat{R}_i = \hat{R}_0 + \hat{h}_i$$

\hat{h}_i 为惯性系统计算的高度。

四、经纬度和高度计算

飞行器所处位置的经纬度和高度，可以直接用计算的飞行器相对地球的运动速度计算求得

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{V}_N}{(\hat{R}_N + \hat{h})}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{V}_E}{(\hat{R}_E + \hat{h}) \cos \hat{\phi}}$$

$$\hat{h} = -\hat{V}_D$$

式中

$$\hat{R}_N = R_e(1 - 2e + 3e \sin^2 \phi)$$

$$\hat{R}_E = R_e(1 + e^2 \sin^2 \phi)$$

\hat{R}_N 为参考椭球子午面内的曲率半径， R_E 为垂直子午面的法线平面内的曲率半径（见附录三 (c-17) (c-19)）。

经度和纬度计算中的高度信息，可用惯性高度和高度表测量的高度的加权非线性估计，即

$$\hat{h} = (\hat{h}_a)^\alpha (\hat{h}_i)^{1-\alpha} \quad (4-25)$$

式中 α 为加权因子。

代入下式得

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{V}_N}{[\hat{R}_N + (\hat{h}_a)^\alpha (\hat{h}_i)^{1-\alpha}]}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{V}_E}{[\hat{R}_E + (\hat{h}_a)^\alpha (\hat{h}_i)^{1-\alpha}] \cos \hat{\phi}}$$

$$\hat{h}_i = -\hat{V}_D$$

故经纬度和高度为

$$\left. \begin{aligned} \hat{\phi} &= \int \hat{\phi} dt + \phi(0) \\ \hat{\lambda} &= \int \hat{\lambda} dt + \lambda(0) \\ \hat{h} &= \int \hat{h}_i dt + h(0) \end{aligned} \right\} \quad (4-26)$$

系统程序编排如图 (4-6)。图 (4-6) 的程序编排为取 $\alpha=0$ 的情况。

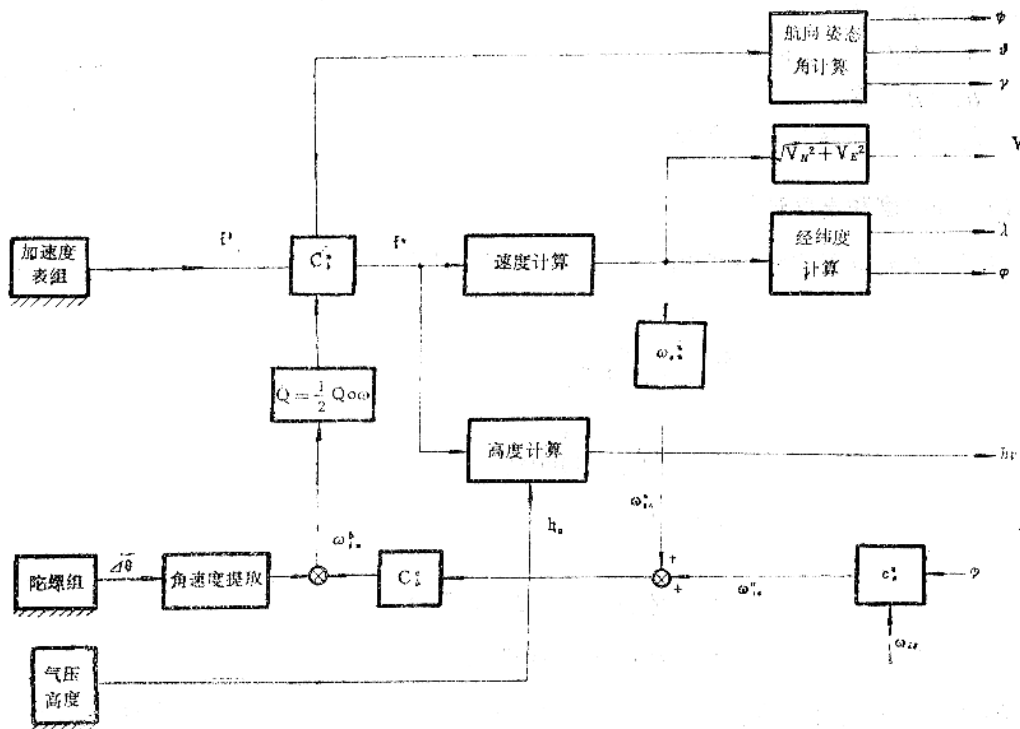


图4-6 用地理坐标系的捷联式系统程序编排

五、垂直通道的阻尼

惯导系统的高度通道是不稳定的，当采用气压高度信息或其他外部高度信息和惯性高度加权估计来计算重力时，如果 $k \geq 2$ ，则可以避免高度的发散，但系统仍具有振荡特性。为了使高度通道稳定工作，仍需要进行阻尼。

为了便于说明概念，我们假定

$$g_e \approx \frac{\mu}{R^2} = \frac{\mu}{(R_0)^k (R_i)^{2-k}}$$

$$R_0 = R_0 + h_0$$

$$R_i = R_0 + h_i$$

代入上式，并把 $(R_0 + h_0)^{-k}$ 和 $(R_0 + h_i)^{-(2-k)}$ 展成级数，并取前两项，得到

$$g_e \approx R_0^k \frac{\mu}{R_0^{2-k}} \left[1 - (2-k) \frac{h_i}{R_0} \right]$$

$$= g_0 \left[1 - (2-k) \frac{h_i}{R_0} \right] \tag{4-27}$$

简化的垂直通道方块结构图如图(4-7)。图中除了引力加速度之外，没有考虑其他有害加速度，这样做完全是为了便于说明问题。如果考虑初始速度 $V_D(0)$ 和初始高度 $h(0)$ 为零，则从图(4-7)可以直接写出

$$Sh = \frac{-1}{S} \left[f_D + g_0 - (2-k) \frac{g_0}{R_0} h_i \right]$$

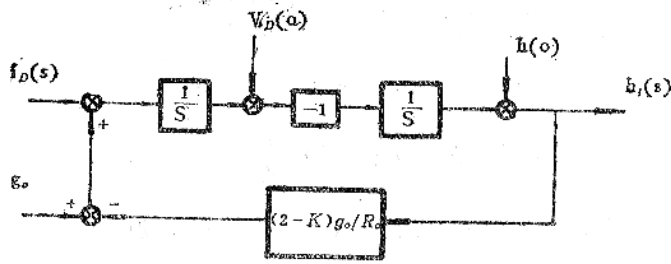


图4-7 垂直通道方块图

即

$$\left[S^2 - (2-K) \frac{g_0}{R_0} \right] h_i = -(f_D + g_0)$$

系统特征方程为

$$\Delta = S^2 - (2-K) \frac{g_0}{R_0} = 0 \tag{4-28}$$

如取 $K = 0$ ，即只用惯性高度而不用外部高度信息，则

$$\Delta = S^2 - 2 \frac{g_0}{R_0} = 0$$

显然系统是不稳定的，高度 h 随时间振荡增长，如果采用外部高度信息和惯性高度信息加权估计，且使 $K \geq 2$ ，则可以避免高度通道的发散，但即使 $K > 2$ ，系统仍具有振荡特性，所以仍然需要进行阻尼。常用的二阶阻尼回路如图（4-8）所示。按图（4-8）可以写出系

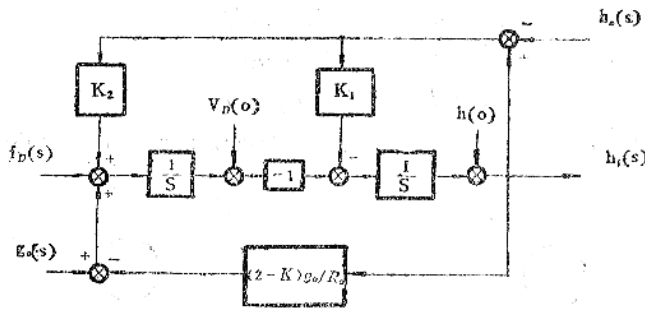


图4-8 垂直通道的二阶阻尼回路

统的方程式为

$$S V_D = K_2 h_i - (2-K) \frac{g_0}{R_0} h_i + f_D + g_0 - K_2 h_o$$

$$S h = -V_D - K_1 h_i + K_1 h_o$$

写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} S & -\left[K_2 + (2-K) \frac{g_0}{R_0} \right] \\ 1 & S + K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_D \\ h_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_D + g_0 - K_2 h_o \\ + K_1 h_o \end{bmatrix} \tag{4-29}$$

特征方程为

$$A = \begin{vmatrix} S & -[K_2 + (2-K)\frac{g_0}{R_0}] \\ 1 & S + K_1 \end{vmatrix} = 0$$

即 $S(S + K_1) + K_2 + (2 - K)\frac{g_0}{R_0} = 0$ (4-30)

显然，适当的选择 K_1, K_2 和 K 三个系数，可以得到需要的特性。为了简单起见，取 $K = 0$ ，则选择 K_1 和 K_2 同样也可以得到需要的特性。

§ 4-3 用游动方位坐标系的捷联式惯导系统

游动方位坐标系仍然是一种地平坐标系，但是这个坐标系绕垂直轴只跟踪地球的转动，即以 $\omega_{ie} \sin\varphi$ 相对惯性空间转动 而不跟踪由于飞机相对地球的运动形成的绕垂直轴的转动，因此，随着飞机的运动，游动坐标系在方位上相对地球是游动的。相对地理坐标在方位上的游动角我们用 α 表示，游动方位坐标系我们用 $x_P y_P z_P$ 表示，如图 4-9 所示。

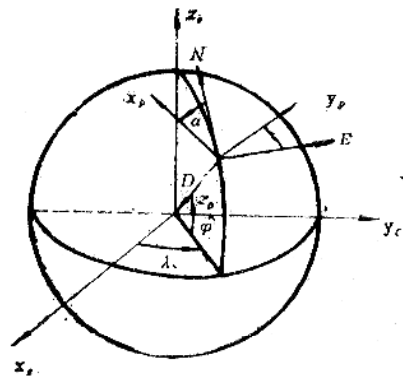


图4-9 游动方位坐标系

一、导航位置计算

$x_P y_P z_P$ 和 $x_e y_e z_e$ 的关系是将 $x_e y_e z_e$ 坐标系绕 z_e 轴转动 λ 角得 $x'_e y'_e z'_e$ ，再将 $x'_e y'_e z'_e$ 绕 $-y'_e$ 轴转动 $90 + \varphi$ 角得 NED 地理坐标系，再将 NED 绕 $-D$ 轴转动 α 角则得到 $x_P y_P z_P$ 坐标系，按符号法可以画出坐标变换符号图如图 (4-10) 所示，按式 (4-10)

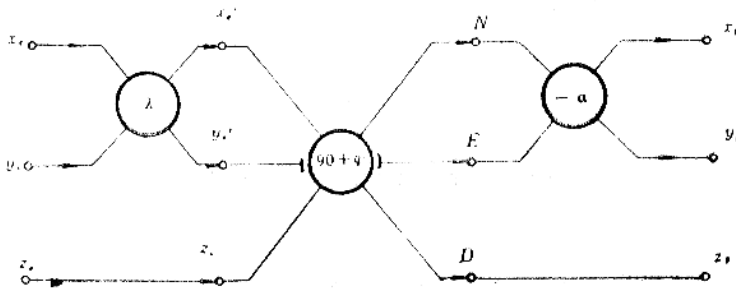


图4-10 坐标变换符号图

可以写出

$$\begin{aligned} x_P &= x_e [\cos\lambda \cos(90 + \varphi) \cos\alpha + \sin\lambda \sin\alpha] \\ &\quad + y_e [\sin\lambda \cos(90 + \varphi) \cos\alpha - \cos\lambda \sin\alpha] \\ &\quad + z_e \sin(90 + \varphi) \cos\alpha \\ &= (-\cos\lambda \sin\varphi \cos\alpha + \sin\lambda \sin\alpha) x_e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+(-\sin\lambda \sin\varphi \cos\alpha - \cos\lambda \sin\alpha)y_e \\
 &+ \cos\varphi \cos\alpha z_e \\
 y_p = &(-\cos\lambda \sin\varphi \sin\alpha - \sin\lambda \cos\alpha)x_e \\
 &+ (\cos\lambda \cos\alpha - \sin\lambda \sin\varphi \sin\alpha)y_e + \cos\varphi \sin\alpha z_e \\
 z_p = &-\cos\lambda \cos\varphi x_e - \sin\lambda \cos\varphi y_e - \sin\varphi z_e
 \end{aligned}$$

写成矩阵的形式为

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\lambda \sin\varphi \cos\alpha & -\sin\lambda \sin\varphi \cos\alpha & \cos\varphi \cos\alpha \\ +\sin\lambda \sin\alpha & -\cos\lambda \sin\alpha & \\ -\cos\lambda \sin\varphi \sin\alpha & \cos\lambda \cos\alpha & \cos\varphi \sin\alpha \\ -\sin\lambda \cos\alpha & -\sin\lambda \sin\varphi \sin\alpha & \\ -\cos\lambda \cos\varphi & -\sin\lambda \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix} \quad (4-31)$$

用 C_e^p 表示上式的变换矩阵, 则可以写作

$$\mathbf{C}_e^p = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \quad (4-32)$$

式中 C_{ij} 为 (4-31) 式中变换矩阵中的相应元素。

显然, 飞行器所处位置的经纬度可用下式算出

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -\sin^{-1}(C_{33}) \\ \lambda &= \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{C_{32}}{C_{31}}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4-33)$$

而游动方位坐标系相对地理坐标系的游动角的计算式为

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{C_{23}}{C_{13}}\right) \quad (4-34)$$

可见, 导航位置计算的第一步是计算方向余弦矩阵 \mathbf{C}_e^p , 第二步是按 (4-33) 式计算经纬度, 同时也可以利用 (4-34) 式计算游动角 α 。

1. 位置矩阵的计算

由于游动方位坐标系相对地球坐标系的运动角速度较小, 通常用解矩阵微分方程的方法求解位置矩阵, 即

$$\dot{\mathbf{C}}_e^p = \mathbf{C}_e^p \omega_e^p \quad (4-35)$$

式中 ω_e^p 为由飞行器相对地球的运动产生的游动方位坐标系相对地球坐标系转动角速度的反对称形式。即

$$\omega_e^p = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{epz} & \omega_{epy} \\ \omega_{epz} & 0 & -\omega_{epx} \\ -\omega_{epy} & \omega_{epx} & 0 \end{pmatrix}$$

由于游动方位坐标系绕垂直轴不跟踪飞行器的运动, 所以 $\omega_{epz} = 0$, 把 (4-35) 式展开得

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{C}_{11} &= -C_{31} \omega_{ep_y} \\
 \dot{C}_{21} &= C_{31} \omega_{ep_x} \\
 \dot{C}_{31} &= C_{11} \omega_{ep_y} - C_{21} \omega_{ep_x} \\
 \dot{C}_{12} &= -C_{32} \omega_{ep_y} \\
 \dot{C}_{22} &= C_{32} \omega_{ep_x} \\
 \dot{C}_{32} &= C_{12} \omega_{ep_y} - C_{22} \omega_{ep_x} \\
 \dot{C}_{13} &= -C_{33} \omega_{ep_y} \\
 \dot{C}_{23} &= C_{33} \omega_{ep_x} \\
 \dot{C}_{33} &= C_{13} \omega_{ep_y} - C_{23} \omega_{ep_x}
 \end{aligned} \right\} \quad (4-36)$$

表示

$$\mathbf{X} = [C_{11}, C_{21}, C_{31}, C_{12}, C_{22}, C_{32}, C_{13}, C_{23}, C_{33}]^T$$

则(4-36)式可以写作

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = f[\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\omega}(t)]$$

在计算机上解算时, 可以用一阶龙格-库法计算即

$$\mathbf{X}(t+T) = f[\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\omega}(t)] + T f[\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\omega}(t)]$$

式中 T 为步长。

从(4-36)式可以看到, 前三个方程 \dot{C}_{11} , \dot{C}_{21} , \dot{C}_{31} 和下面的六个方程无关, 故可以独立求解。为了减小计算工作量, 可以利用矩阵的正交特性, 用下列三个余子式约束条件来计算。即

$$\left. \begin{aligned}
 C_{11} &= C_{22} C_{33} - C_{23} C_{32} \\
 C_{12} &= C_{23} C_{31} - C_{21} C_{33} \\
 C_{13} &= C_{21} C_{32} - C_{22} C_{31}
 \end{aligned} \right\} \quad (4-37)$$

这样, 求解矩阵微分方程时, 只联立求解六个一阶微分方程, 利用得到的元素再按(4-37)式计算剩下的三个元素。由于(4-37)式是代数方程, 所以, 计算工作量是很小的。这种计算方法的优点是除了计算工作量较小之外, 而且计算得到的位置矩阵仍然是正交阵。这样就省去了矩阵正交化的计算。缺点是这个正交阵不是最优正交的, 和最优正交化阵相比, 具有较大的漂移误差。矩阵的正交化问题在第六章介绍。

2. 经纬度和游动角的计算

C_p^s 的各元素计算求得后, 即可按(4-33)(4-34)式计算经纬度和游动角。由于 φ , λ , α 是由反三角函数来计算的, 因此存在着多值问题, 纬度的定义域在 $\pm 90^\circ$ 之间, 和 \sin^{-1} 的主值一致, 故不存在多值问题。而经度“ λ ”的定义域在 ± 180 度之间, “ α ”的定义域在 $0 \sim 360$ 度, 而 tg^{-1} 的主值位于 ± 90 度之间, 故经度和游动角存在着由主值求真值的问题。这种情况, 和第三章讲的从姿态阵元素求姿态和航向角的情况类似。

由
$$\lambda = \text{tg}^{-1} \left(\frac{C_{32}}{C_{31}} \right)$$

可知, λ 的真值可按 C_{32} 和 C_{31} 的符号来判断, 其判断方法如表 4-1。

表4—1 λ 真值的判断

C_{31}	C_{32}	$\lambda_{真}$	象 限
$\rightarrow 0$	+	$\frac{\pi}{2}$	
$\rightarrow 0$	-	$-\frac{\pi}{2}$	
+	+	$\lambda_{主}$	$(0, 90^\circ)$
+	-	$\lambda_{主}$	$(0, -90^\circ)$
-	+	$\lambda_{主} + 180^\circ$	$(90^\circ, 180^\circ)$
-	-	$\lambda_{主} - 180^\circ$	$(180^\circ, 270^\circ)$

类似的情况，可以根据 C_{23}, C_{13} 的符号来判断游动角 α 的真值，其判断方法如表 4—2。

表4—2 游动角 α 真值判断

C_{13}	C_{23}	$\alpha_{真}$	象 限
$\rightarrow 0$	+	$\frac{\pi}{2}$	
$\rightarrow 0$	-	$-\frac{\pi}{2}$	
+	+	$\alpha_{主}$	$(0, 90^\circ)$
+	-	$360^\circ + \alpha_{主}$	$(0, -90^\circ)$
-	+	$180^\circ + \alpha_{主}$	$(90^\circ, 180^\circ)$
-	-	$180^\circ + \alpha_{主}$	$(180^\circ, 270^\circ)$

二、速度计算

把沿机体坐标系测量的比力 f^b 变换到游动方位坐标系后得到 f^P ，类似 (4—20) 式可以写出 f^P 的表达式为

$$f^P = \dot{V}^P + (\omega_{\circ P}^{PK} + 2\omega_{\circ P}^{PK})V^P + g^P \quad (4-38)$$

或

$$\dot{V}^P = f^P - (\omega_{\circ P}^{PK} + 2\omega_{\circ P}^{PK})V^P + g^P$$

把上式展开则得到

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_{xp} \\ \dot{V}_{yp} \\ \dot{V}_{zp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xp} \\ f_{yp} \\ f_{zp} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2\omega_{iey} & -(2\omega_{iey} + \omega_{epy}) \\ -2\omega_{iez} & 0 & 2\omega_{iey} + \omega_{epy} \\ 2\omega_{iey} + \omega_{epy} & -(2\omega_{iez} + \omega_{epz}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{xp} \\ V_{yp} \\ V_{zp} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \quad (4-39)$$

即

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_{xp} &= f_{xp} + 2\omega_{iey} V_{yp} - (2\omega_{iey} + \omega_{epy}) V_{zp} \\ \dot{V}_{yp} &= f_{yp} - 2\omega_{iez} V_{xp} + (2\omega_{iey} + \omega_{epy}) V_{zp} \\ \dot{V}_{zp} &= f_{zp} + (2\omega_{iey} + \omega_{epy}) V_{xp} - (2\omega_{iez} + \omega_{epz}) V_{yp} + g \end{aligned} \right\} \quad (4-40)$$

联立求解这三个微分方程得到 V_{xp} , V_{yp} 和 V_{zp} 。由于 ω_{ep} 是 V 的函数，故这组微分方程是非线性的。当用一阶龙格-库塔法计算时，则相当于线性化。

ω_{epz} , ω_{epy} 可以根据 V_{xp} , V_{yp} 来计算。按图 (4-9) 可以很容易的写出游动方位坐标系和地理坐标系之间的变换矩阵为

$$C_n^p = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故沿地理坐标系轴向的速度为

$$\begin{aligned} V_N &= V_{xp} \cos\alpha + V_{yp} \sin\alpha \\ V_E &= -V_{xp} \sin\alpha + V_{yp} \cos\alpha \end{aligned}$$

由

$$\omega_{epn} = \frac{V_E}{R_E}$$

$$\omega_{epe} = -\frac{V_N}{R_N}$$

得

$$\left. \begin{aligned} \omega_{epn} &= \frac{1}{R_E} (V_{yp} \cos\alpha - V_{xp} \sin\alpha) \\ \omega_{epe} &= -\frac{1}{R_N} (V_{xp} \cos\alpha + V_{yp} \sin\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (4-41)$$

由
得

$$\begin{pmatrix} \omega_{epz} \\ \omega_{epy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{R_E} (V_{yp} \cos\alpha - V_{xp} \sin\alpha) \\ -\frac{1}{R_N} (V_{xp} \cos\alpha + V_{yp} \sin\alpha) \end{pmatrix}$$

把上式等号右边展开得

$$\begin{pmatrix} \omega_{epz} \\ \omega_{epy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_N}\right) \sin\alpha \cos\alpha & \frac{\sin^2\alpha}{R_N} + \frac{\cos^2\alpha}{R_E} \\ -\left(\frac{\cos^2\alpha}{R_N} + \frac{\sin^2\alpha}{R_E}\right) & \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_N}\right) \sin\alpha \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{xp} \\ V_{yp} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_a} & \frac{1}{R_{yp}} \\ -\frac{1}{R_{xp}} & -\frac{1}{\tau_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{xp} \\ V_{yp} \end{bmatrix} \quad (4-42)$$

式中 $\frac{1}{R_{xp}} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_N} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_E}$ 为沿游动方位坐标系 x 轴向地球的曲率半径。

$\frac{1}{R_{yp}} = \frac{\sin^2 \alpha}{R_N} + \frac{\cos^2 \alpha}{R_E}$ 为沿游动方位坐标系 y 轴向地球的曲率半径。

$\frac{1}{\tau_a} = \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_N} \right) \sin \alpha \cos \alpha$ 为地球的扭转效应。

(4-41) 式为代数方程, (4-41) 和 (4-40) 式联合计算, 可以得到 V_{xp} , V_{yp} , V_{zp} 和 ω_{epx} , ω_{epy} 。在计算速度微分方程时, 还要用到 ω_{ie}^p , ω_{ie}^e 可按下式计算。

$$\omega_{ie}^p = \mathbf{C}_e^p \omega_{ie}^e \quad (4-43)$$

三、姿态和航向计算

飞行器的姿态计算已在第三章讨论过。如果把 (1-5) 式中的 ψ 换成 $\psi_G = \psi + \alpha$, 则得到

$$\mathbf{C}_p^e = \begin{bmatrix} \cos \psi_G \cos \theta & \sin \psi_G \sin \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi_G \sin \theta \sin \gamma & \sin \psi_G \sin \theta \sin \gamma & \cos \theta \sin \gamma \\ -\sin \psi_G \cos \gamma & +\cos \psi_G \cos \gamma & \\ \cos \psi_G \sin \theta \cos \gamma & \sin \psi_G \sin \theta \cos \gamma & \cos \theta \cos \gamma \\ +\sin \psi_G \sin \gamma & -\cos \psi_G \sin \gamma & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (4-44)$$

按 (4-44) 式可得航向姿态角的计算式为

$$\left. \begin{aligned} \psi_G &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{T_{12}}{T_{11}} \right) \\ \theta &= -\sin^{-1}(T_{13}) \\ \gamma &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{T_{23}}{T_{33}} \right) \\ \psi &= \psi_G - \alpha \end{aligned} \right\} \quad (4-45)$$

(4-45) 中 ψ_G 和 γ 的真值可以按 T_{12} , T_{11} , T_{23} , T_{33} 的符号判断其所处的象限, 然后根据主值求得, 其判断方法和第三章表 3-3 和表 3-4 相同。

姿态矩阵的求法如第三章所述, 通常用四元数法。

四、垂直通道的三阶阻尼回路

用游动方位坐标系的捷联式惯导系统和用地理坐标系的捷联式惯导系统, 其高度通道是

一样的。上一节我们介绍了二阶阻尼回路，在二阶阻尼回路中，除了加权因子 K 之外，只有 K_1 和 K_2 两个参数可以选择。因此，为了达到需要的特性参数选择上受到限制难以实现。为了得到更好的阻尼特性，可以采用三阶阻尼回路，为了突出阻尼回路的作用，我们取加权因子 K 为零。即

$$g_e \approx g_0 \left(1 - 2 \frac{h_i}{R_0} \right) = g_0 - 2 \frac{g_0}{R_0} h_i \quad (4-46)$$

三阶阻尼回路的系统结构见图 (4-11)。按图 (4-11) 可以写出垂直通道的系统方程为：

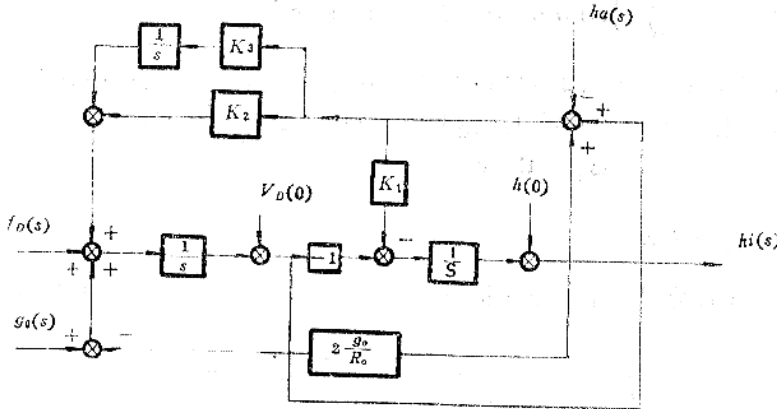


图4-11 垂直通道三阶阻尼回路

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_i \\ \dot{V}_D \\ \dot{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_1 & -(1+K_1K_4) & 0 \\ K_2 - 2\frac{g_0}{R_0} & K_2K_4 & 1 \\ K_3 & K_3K_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i \\ V_D \\ X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 \\ -K_2 \\ -K_3 \end{bmatrix} h_a + \begin{bmatrix} 0 \\ f_D \\ 0 \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} S+K_1 & 1+K_1K_4 & 0 \\ 2\frac{g_0}{R_0}-K_2 & S-K_2K_4 & -1 \\ -K_3 & -K_3K_4 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i \\ V_D \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ -K_2 \\ -K_3 \end{bmatrix} h_a \quad (4-47)$$

系统特征方程为

$$S^3 + (K_1 - K_2K_4)S^2 + \left[K_2 - K_3K_4 - (1 + K_2K_4)2\frac{g_0}{R_0} \right]S + K_3 = 0$$

K_4 一般取 0.5~0.8 秒之间，如按等根条件来选择系统参数，即使系统特征方程为：

$$\left(S + \frac{1}{\tau} \right)^3 = 0$$

则用对应系数相等，可求得

$$\left. \begin{aligned}
 K_3 &= \frac{1}{\tau_3} \\
 K_1 &= \frac{2 \frac{g_0}{R_0} K_4 \tau^3 + 3\tau^2 + 3K_4 \tau + K_4^2}{\left(1 - 2 \frac{g_0}{R_0} K_4^2\right) \tau^3} \\
 K_2 &= \frac{2 \frac{g_0}{R_0} (\tau^3 + 3K_4 \tau^2) + 3\tau + K_4}{\left(1 - 2 \frac{g_0}{R_0} K_4^2\right) \tau^3}
 \end{aligned} \right\} (4-48)$$

用游动方位坐标系的捷联式惯导系统的程序编排如图(4-12)。姿态计算一般采用四阶龙格-库塔法解四元数微分方程，而位置矩阵微分方程和速度微分方程可用一阶龙格-库塔法求解，由于姿态计算用四阶龙格-库塔法，所以，角速率信息用二阶提取算法。如果姿态计算周期为 T ，则陀螺的采样周期为 $\frac{T}{2}$ ，而速度、高度、位置矩阵的计算可以慢一些，即计算周期可以长一些。用 NT 表示，而姿态角和经纬度的计算周期可以更长一些，一般为 $2NT$ ，这样，按计算周期的长短，整个系统可以分成四个部分，即 $\frac{T}{2}$ 部分， T 部分， NT 部分， $2NT$ 部分（见图4-12）。取 $T=0.025$ 秒， $N=4$ 是一种可能的方案。

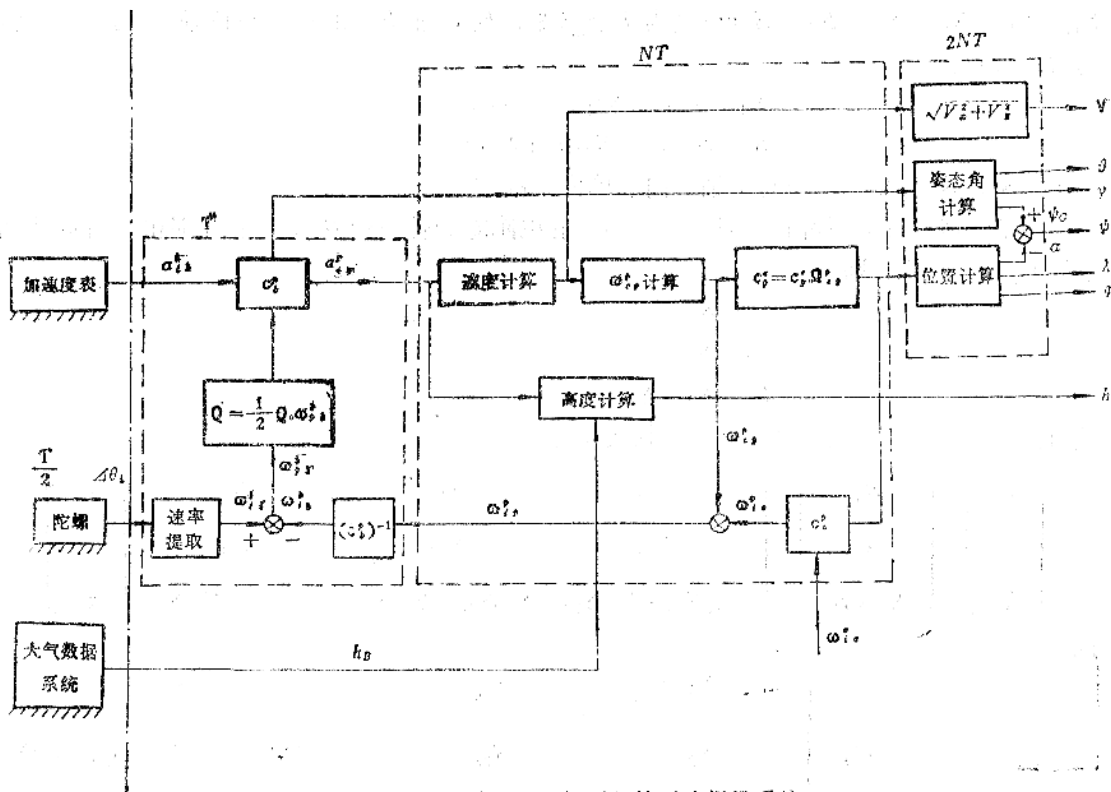


图4-12 用游动方位坐标系的捷联式惯导系统

和游动方位坐标系类似的另一种地平坐标系叫自由方位坐标系，这种坐标系的 xy 平面保持在水平面内，但绕垂直轴相对惯性空间不转动，既绕垂直轴既不跟踪飞行器的运动也不跟踪地球的转动，绕垂直轴相对惯性空间的角速度为零。采用自由方位坐标系的捷联式惯导系统程序编排和用游动方位坐标系的情况类似。只要使 $\omega_{re} = 0$ 即可。

§4—4 用静电陀螺的捷联式惯导系统

静电陀螺是一种球形转子陀螺，它的转子相对外壳可以任意转动，转角不受限制。所以，静电陀螺是一种位置陀螺，它可以直接测量机体坐标系相对惯性坐标系的角位置。当读取刻线为余弦刻线时，则读取系统可以直接给出机体坐标系和惯性坐标系之间的方向余弦。如图(4—13)，两个静电陀螺和三个加速度计都固联在机体 B 上。为了简单起见，假设静电陀螺光电传感器的测量轴和机体坐标系一致，则光电传感器的输出信号

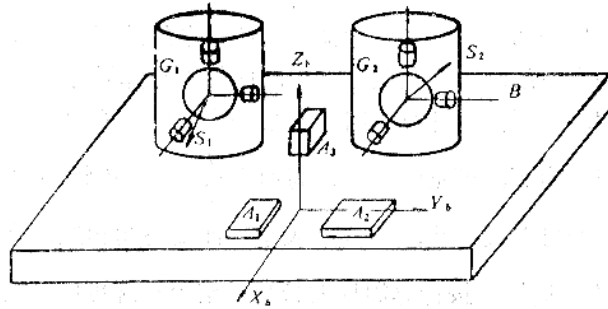


图4—13 捷联式静电陀螺配置

$S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{21}, S_{22}, S_{23}$ 分别为两个陀螺的转子轴 S_1 和 S_2 与机体轴 i_b, j_b, k_b 之间的方向余弦。

$$\vec{S}_1 = S_{11} i_b + S_{12} j_b + S_{13} k_b$$

$$\vec{S}_2 = S_{21} i_b + S_{22} j_b + S_{23} k_b$$

式中 \vec{S}_1, \vec{S}_2 分别为两个转子轴方向的单位矢量。

如果在惯性导航系统初始对准，两个静电陀螺的转子轴 \vec{S}_1 和 \vec{S}_2 分别和地心惯性系的 i_I, j_I 一致，则

$$i_I = \vec{S}_1$$

$$j_I = \vec{S}_2$$

$$k_I = \vec{S}_1 \times \vec{S}_2$$

故机体坐标系和惯性坐标系之间的变换关系为

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{S}_1 \\ \vec{S}_2 \\ \vec{S}_1 \times \vec{S}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22} & S_{13}S_{21} - S_{11}S_{23} & S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_b \\ j_b \\ k_b \end{bmatrix}$$

故

$$C_I^1 = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22} & S_{13}S_{21} - S_{11}S_{23} & S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} \end{bmatrix} \quad (4-49)$$

有了机体坐标系和惯性坐标系之间变换矩阵 C_i^b 之后，其他的导航计算则完全可以和用惯性坐标系的捷联式惯性导航系统相同的程序编排(见§4—1)。当导航计算采用游动方位坐标系或者自由方位坐标系时，用静电陀螺的捷联式惯导系统的程序编排也可以如图(4—14)所示。

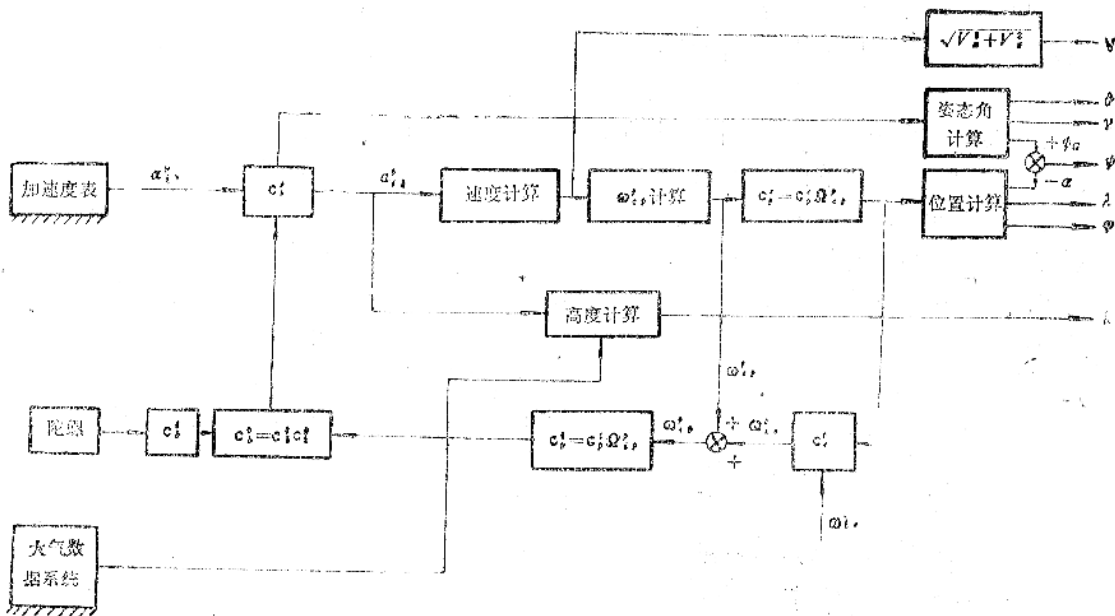


图4—14 用静电陀螺仪的联式导航程序编排

第五章 捷联式惯导系统的误差分析

捷联式惯导系统和平台式惯导系统的主要区别，是前者用数学平台，而后者是用实体的物理平台。从基本原理上讲，两种系统没有本质的区别。但是，由于捷联式惯导系统的一些特点，使它在性能上和平台式惯导系统有所不同。

在捷联式系统中，由于惯性仪表直接安装在飞行器上，飞行器的动态环境，特别是飞行器的角运动，直接影响惯性仪表；在平台式惯导系统中，惯性仪表是安装在平台上，由于平台对飞行器角运动的隔离作用，使飞行器的角运动对惯性仪表基本没有影响。在捷联式惯导系统中，惯性仪表直接承受飞行器的角运动，因此，惯性仪表的动态误差要比平台式系统大得多。在实际系统中，必须加以补偿。另外，在捷联式系统中，由于采用数学平台，即在计算机中通过计算来完成导航平台的功能，由于计算方法的近似和计算机的有限字长，所以必然存在着计算误差。其他的导航计算，也存在着计算误差，但是导航计算的计算误差一般较小，且捷联式系统和平台式系统基本相同，所以，从计算误差来说，捷联式系统和平台式系统相比，多了数学平台的计算误差。

捷联式惯导系统的主要误差源，我们考虑以下几种：

1. 惯性仪表的安装误差和标度因子误差。
2. 陀螺的漂移和加速计的零位误差。
3. 初始条件误差，包括导航参数和姿态航向的初始误差。
4. 计算误差，主要考虑姿态航向系统的计算误差，也就是数学平台的计算误差。
5. 飞行器的角运动所引起的动态误差。

§5—1 加速度表和陀螺的安装误差和标度误差

一、非正交变换

为了便于说明概念，我们考虑平面的情况。假设在平面内有一个正交坐标系 $x_p y_p$ 和一个非正交坐标系 $x_a y_a$ (见图5—1)。 x_p 和 x_a 之间的夹角 θ_{xz} ， y_p 和 y_a 之间的夹角为 θ_{yz} ，且 $\theta_{xz} \neq \theta_{yz}$ 。设有一固定矢量 f ， f 和 x_p 之间的夹角为 ϕ 。显然， f 在 x_p ， y_p 上的投影为

$$\left. \begin{aligned} f_{x_p} &= f \cos \phi \\ f_{y_p} &= f \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (5-1)$$

考虑 θ_{xz} 、 θ_{yz} 为小量，则 f 在 x_a 和 y_a 轴上的投影为

$$\left. \begin{aligned} f_{x_a} &= f \cos(\phi - \theta_{xz}) \\ &\approx f \cos \phi + f \theta_{xz} \sin \phi \\ f_{y_a} &= f \sin(\phi - \theta_{yz}) \\ &\approx f \sin \phi - f \theta_{yz} \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (5-2)$$

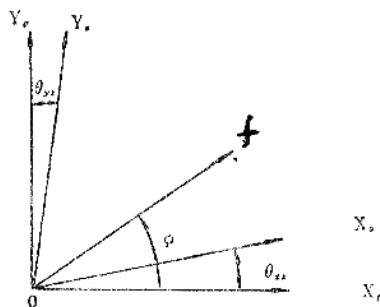


图5—1 非正交变换

坐标系 p 和坐标系 a 之间的变换矩阵为:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_a^p &= \begin{bmatrix} \cos\theta_{xz} & -\sin\theta_{yz} \\ \sin\theta_{xz} & \cos\theta_{yz} \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{yz} \\ \theta_{xz} & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_p^a &= (\mathbf{C}_a^p)^T \end{aligned}$$

按固定矢量的坐标变换关系有 $\mathbf{f}^a = (\mathbf{C}_a^p)^T \mathbf{f}^p$ 即

$$\begin{bmatrix} f_{xa} \\ f_{ya} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \theta_{xz} \\ -\theta_{yz} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xp} \\ f_{yp} \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

故

$$\begin{aligned} f_{xa} &= f_{xp} + \theta_{xz} f_{yp} \\ f_{ya} &= f_{yp} - \theta_{yz} f_{xp} \end{aligned}$$

把(5-1)式代入则

$$\begin{aligned} f_{xa} &= f \cos\phi + f \theta_{xz} \sin\phi \\ f_{ya} &= f \sin\phi - f \theta_{yz} \cos\phi \end{aligned}$$

上式即(5-2)式, 说明(5-3)式的变换是正确的。如果把 \mathbf{f}^a 变换成 \mathbf{f}^p , 即: $\mathbf{f}^p = \mathbf{C}_a^p \mathbf{f}^a$

$$\begin{bmatrix} f_{xp} \\ f_{yp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{yz} \\ \theta_{xz} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \cos\phi + f \theta_{xz} \sin\phi \\ f \sin\phi - f \theta_{yz} \cos\phi \end{bmatrix}$$

展开并略掉二阶微量得

$$\left. \begin{aligned} f_{xp} &\approx f \cos\phi + f \theta_{xz} \sin\phi - f \theta_{yz} \sin\phi \\ f_{yp} &\approx f \sin\phi - f \theta_{yz} \cos\phi + f \theta_{xz} \cos\phi \end{aligned} \right\} \quad (5-4)$$

显然, (5-4)式和(5-1)式不相等。即

$$\mathbf{f}^p \neq \mathbf{C}_a^p \mathbf{f}^a \quad (5-5)$$

即从非正交坐标系变换到正交坐标系不成立。这是因为一个矢量分解到正交坐标系是按投影关系, 而分解到非正交坐标系则不是按投影关系。从数学上来讲, 一个非正交变换阵和其转置阵的乘积不等于单位阵。

由 $\mathbf{f}^a = (\mathbf{C}_a^p)^T \mathbf{f}^p$

等式两边前乘以 \mathbf{C}_a^p , 有

$$\mathbf{C}_a^p \mathbf{f}^a = \mathbf{C}_a^p (\mathbf{C}_a^p)^T \mathbf{f}^p \quad (5-6)$$

按(5-5)式

$$\mathbf{C}_a^p (\mathbf{C}_a^p)^T \neq I \quad (5-7)$$

把 \mathbf{C}_a^p 写成

$$\mathbf{C}_a^p = I + \Delta \mathbf{C}_a^p \text{ 的形式。}$$

式中

$$\Delta \mathbf{C}_a^p = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_{yz} \\ \theta_{xz} & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{C}_a^p (\mathbf{C}_a^p)^T = (I + \Delta \mathbf{C}_a^p) [I + (\Delta \mathbf{C}_a^p)^T]$$

略掉二阶微量则

$$\mathbf{C}_a^p (\mathbf{C}_a^p)^T = I + \Delta \mathbf{C}_a^p + (\Delta \mathbf{C}_a^p)^T$$

代入(5-6)式则有

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^p &= [I + \Delta \mathbf{C}_a^p + (\Delta \mathbf{C}_a^p)^T]^{-1} \mathbf{C}_a^p \mathbf{f}^a \\ &= [I - \Delta \mathbf{C}_a^p - (\Delta \mathbf{C}_a^p)^T] [I + \Delta \mathbf{C}_a^p] \mathbf{f}^a \\ &\approx [I - (\Delta \mathbf{C}_a^p)^T] \mathbf{f}^a \end{aligned}$$

表示
则

$$\mathbf{C}_a^p = I - (\Delta \mathbf{C}_a^p)^T \quad (5-8)$$

$$\mathbf{f}^p = \mathbf{C}_a^p \mathbf{f}^a \quad (5-9)$$

即用 \mathbf{C}_a^p 从非正交坐标系变换到正交坐标系是成立的。

二、安装误差

在捷联式惯导系统中，加速度计和陀螺仪直接安装在飞行器上。按照要求，三个加速度计和三个陀螺仪(或者两个)的三个输入轴，应和机体坐标系的三个轴完全一致。但实际上，在安装时总是存在着误差。每个加速度计或陀螺仪输入轴的安装误差可以用两个参数来描述，如图(5-2)所示。此时，加速度计坐标系和陀螺坐标系都变成了非正交坐标系。考虑到安装误差角都是小量，所以和机体坐标系之间的变换矩阵可以写作：

$$\mathbf{C}_a^b = I + \Delta \mathbf{C}_a^b$$

式中

$$\Delta \mathbf{C}_a^b = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_{yz} & \theta_{zy} \\ \theta_{xz} & 0 & -\theta_{zx} \\ -\theta_{xy} & \theta_{yx} & 0 \end{bmatrix}$$

\mathbf{C}_a^b 为加速度计坐标系和机体坐标系之间的变换矩阵，用 \mathbf{C}_g^b 表示陀螺坐标系和机体坐标系之间的变换矩阵，则

$$\mathbf{C}_g^b = I + \Delta \mathbf{C}_g^b$$

按照(5-9)式的关系，要把加速度计测量的比力正确的变换到机体坐标系，其变换关系应为

$$\mathbf{f}^b = [I - (\Delta \mathbf{C}_a^b)^T] \tilde{\mathbf{f}}^a \quad (5-10)$$

类似的情况，如果要把陀螺测量的角速度正确的变换到机体坐标系，其变换关系为

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b = [I - (\Delta \mathbf{C}_g^b)^T] \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ig}^g \quad (5-11)$$

按(5-10)、(5-11)式进行变换可以消除惯性仪表的安装误差。但是，要进行这个变换，需要有 $(\Delta \mathbf{C}_a^b)^T$ 和 $(\Delta \mathbf{C}_g^b)^T$ ，即需要知道加速度计和陀螺的安装误差角。这在实际上往往是做不到的。在实际工作中，常常是把加速度计测量的比力 $\tilde{\mathbf{f}}^a$ ，就当作为机体坐标系轴向测量的比力，此时有

$$\tilde{\mathbf{f}}^b = \tilde{\mathbf{f}}^a = (\mathbf{C}_a^b)^T \mathbf{f}^b = [I + (\Delta \mathbf{C}_a^b)^T] \mathbf{f}^b \quad (5-12)$$

类似的情况，把陀螺测量的角速度 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ig}^g$ 就当作为沿机体坐标系轴向测量的角速度 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b$ ，即

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ig}^g = (\mathbf{C}_g^b)^T \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = [I + (\Delta \mathbf{C}_g^b)^T] \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \quad (5-13)$$

(5-12)式中的 $(\Delta \mathbf{C}_a^b)^T \mathbf{f}^b$ 即为加速度计的安装误差，(5-13)式中即 $(\Delta \mathbf{C}_g^b)^T \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 即为陀螺的安装误差。

如果加速度计的安装误差角为 3 角分，飞行器的运动加速度为 0.1g，则安装误差相当

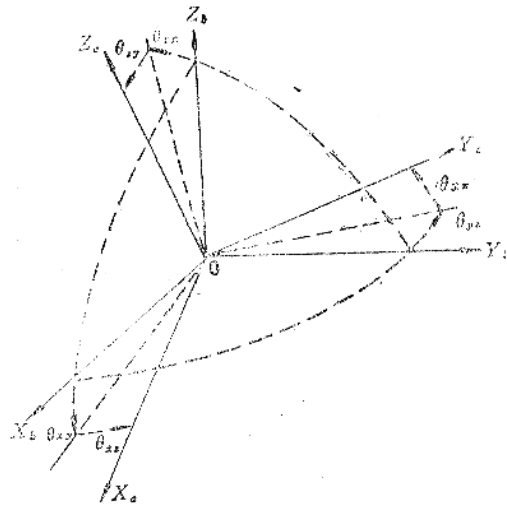


图5-2 安装误差角

于 $10^{-4}g$ 的加速度零位误差。对陀螺仪，如果有 1 角分的安装误差角。则在静基座上工作时，大约产生 0.004 度/小时的等效漂移。实际的捷联式惯性仪表，要求安装误差角为几个角秒。

三、标度误差

加速度计和陀螺仪的输出是脉冲，每一个脉冲信号代表一个速度增量（对加速度计）或一个角度增量（对陀螺）。这个增量值我们用 q_A 和 q_G 表示。 q_A 称作加速度计的标度因子， q_G 称作陀螺的标度因子。 q_A 和 q_G 是通过测试确定的，并存在计算机内。在工作过程中，每次采样后，将采样得到的脉冲数乘以标度因子便得到所要的增量。但是，惯性仪表在工作过程中的实际标度因子和存放在计算机内的标度因子可能不一致，即标度因子存在着误差。为了区别起见，我们用 q_{ac} 和 q_{gc} 表示存放在计算机内的标度因子，并表示

$$\left. \begin{aligned} q_{ac} &= q_a (I + K_a) \\ q_{gc} &= q_g (I + K_g) \end{aligned} \right\} \quad (5-13)$$

式中

$$K_a = \begin{bmatrix} k_{ax} & 0 & 0 \\ 0 & k_{ay} & 0 \\ 0 & 0 & k_{az} \end{bmatrix}$$

$$K_g = \begin{bmatrix} k_{gx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{gy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{gz} \end{bmatrix}$$

K_a 为三个加速度的标度因子误差量形成的对角线阵， K_g 为三个陀螺的标度因子误差量形成的对角线阵。

当 x 轴向陀螺输出角增量为 $\Delta\theta_x$ 时，则相应的脉冲数为： $n = \frac{\Delta\theta_x}{q_{gx}}$ ，在计算机内乘以标度因子 q_{gc} 则在计算机内得到增量为 $q_{gc} \times \frac{\Delta\theta_x}{q_{gx}}$ ，考虑到(5-13)式，则

$$\tilde{\Delta\theta}_x = (1 + k_{gx}) \Delta\theta_x$$

上式也可以写成角速度的形式即

$$\tilde{\omega}_{ibx}^g = (1 + k_{gx}) \omega_{ibx}^g$$

对 y 轴和 z 轴完全相同，分别为

$$\tilde{\omega}_{iby}^g = (1 + k_{gy}) \omega_{iby}^g$$

$$\tilde{\omega}_{ibz}^g = (1 + k_{gz}) \omega_{ibz}^g$$

把以上三式写成矩阵的形式即为

$$\tilde{\omega}_{ib}^g = (I + K_g) \omega_{ib}^g \quad (5-14)$$

加速度计的情况完全类似有

$$\tilde{f}^a = (I + K_a) f^a \quad (5-15)$$

式中 $K_g \omega_{ib}^g$ 和 $K_a f^a$ 即标度因子误差量所引起的角速度误差和比力误差。习惯上简称为陀螺和加速度计的标度误差。

倘若陀螺的标度因子误差为 0.001，那么，在静基座上，由它产生的等效陀螺漂移大约

为 0.01 度/小时。如果沿飞行器某一轴向的加速度为 $10^{-4}g$ ，当标度因子误差为 0.001 时，则等效于 $10^{-4}g$ 的加速度计零位误差。由此可见，为了保证惯性导航系统的精度，对标度因子误差的要求是严格的。对捷联式陀螺，标度因子误差通常在 5~50PPM。加速度计的标度因子误差最大不超过 200PPM。(PPM=parts per million)。

如果同时考虑安装误差和标度误差，并考虑到陀螺本身的漂移误差和加速度计的零位误差，则有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}^b &= (I + K_a)[I + (\Delta C_g^b)^T] \mathbf{f}^b + \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega}_{ib}^b &= (I + K_g)[I + (\Delta C_g^b)^T] \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (5-16)$$

式中 \mathbf{v} ——加速度计的零位误差。

$\boldsymbol{\varepsilon}$ ——陀螺的漂移误差。

把(5-16)展开，并略掉二阶微量得。

$$\tilde{\mathbf{f}}^b = [I + K_a + (\Delta C_g^b)^T] \mathbf{f}^b + \mathbf{v} \quad (5-17)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = [I + K_g + (\Delta C_g^b)^T] \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5-18)$$

§5-2 计算误差

在捷联式惯导系统中，主要的计算问题是姿态矩阵和位置矩阵的计算，而且其中又以姿态矩阵的计算工作量最大。所以，这一节主要讨论姿态矩阵的计算误差。对方向余弦法和四元素法的计算误差将分别进行讨论。

一、计算误差的产生

从对信号采样算起，计算误差包括：量化误差、不可交换性误差、计算方法上的截断误差和计算机有限字长的舍入误差。下面分别简单的进行介绍。

1. 量化误差

把一个连续的模拟信号转换成计算机需要的离散数字信号，要经历两个断续过程，见图(5-3)。

1) 时间断续—采样过程。连续的模拟信号 $f(t)$ ，按一定的时间间隔 T ，逐点的取其瞬时值，这个过程称为采样。连续的模拟信号 $f(t)$ 经过采样之后变为离散的模拟信号 $f^*(t)$ ，两个采样值之间的时间间隔 T ，称为采样周期。

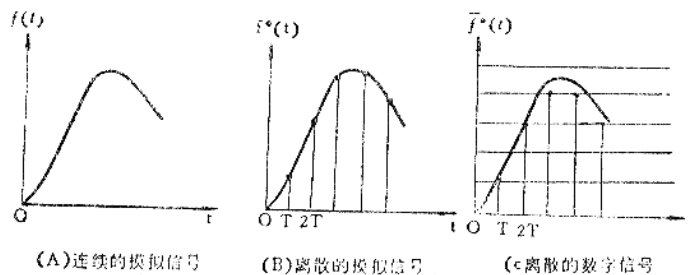


图5-3 A/D 转换过程

2) 数值断续—正量过程。采样信号 $f^*(t)$ 在数值上表示成最小位二进制数的正倍数。

这个过程称为正量。采样信号 $f^*(t)$ 经过正量后，变成离散的数字信号 $\bar{f}^*(t)$ 。

正量过程造成的误差叫作量化误差。量化误差可表示为

$$e_1 = f^*(t) - \bar{f}^*(t)$$

在量化过程中，对剩余部分“ e ”，有两种处理方法：

1) “只舍不入”的正量过程（见图 5—4）。

这种正量过程，量化误差只有正值，它可以取 $0 \sim q$ ，（量化电平）之间的任意值，而且机会均等，因而在 $(0, q)$ 上均匀分布的随机变量。误差的均值或误差的数学期望为。

$$E[e_1] = \int_{-\infty}^{\infty} e_1 P(e) de = \int_0^q \frac{1}{q} e de = \frac{q}{2} \quad (5-19)$$

式中 $P(e)$ 是概率密度函数。

最大误差为

$$e_{max} = q \quad (5-20)$$

误差的方差为

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (e - Ee)^2 P(e) de \\ &= \int_0^q (e - \frac{q}{2})^2 \frac{1}{q} de \\ &= \frac{1}{12} q^2 \end{aligned} \quad (5-21)$$

2) “有舍有入”的正量过程（见图 5—5）。

这种正量过程，类似四舍五入的方法，即小于 $\frac{q}{2}$ 时，舍去；大于 $\frac{q}{2}$ 时，进入。正量误差

$$e_1 = f^*(t) - \bar{f}^*(t)$$

有正有负。它可以取 $-\frac{q}{2} \sim +\frac{q}{2}$ 之间的任意值，而且机会均等，因而在 $(-\frac{q}{2}, \frac{q}{2})$ 上均匀分布的随机变量。

显然，这种正量过程，正量误差的均值为

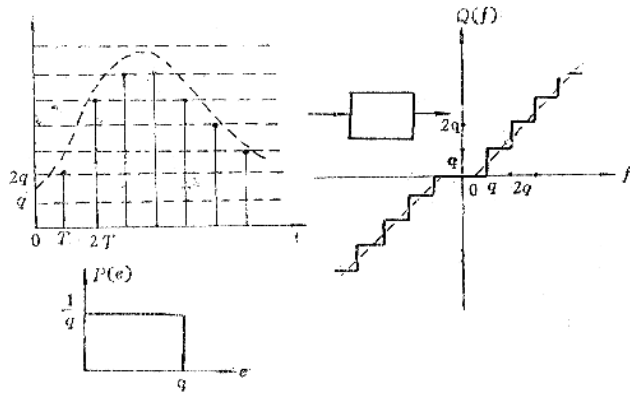


图5—4 “只舍不入”的正量过程

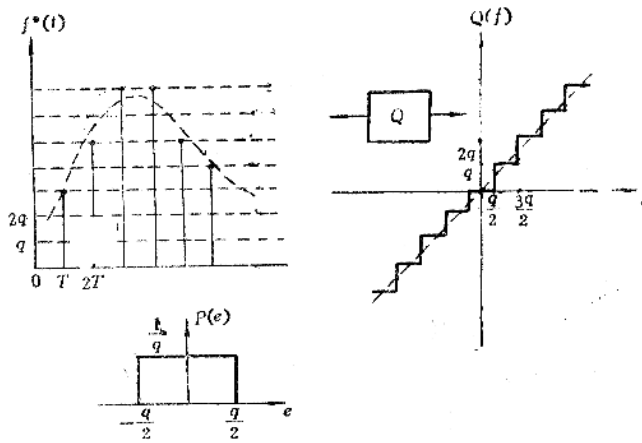


图5—5 “有舍有入”的正量过程

$$E[e]=0 \tag{5-22}$$

最大正量误差为

$$|e_{max}| = \frac{q_c}{2} \tag{5-23}$$

误差的方差为

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (e_1 - Ee_1)^2 P(e) de = \int_{-\frac{q_c}{2}}^{\frac{q_c}{2}} e_1^2 \frac{1}{q_c} de = \frac{q_c^2}{12} \tag{5-24}$$

比较两种正量化的方法，当然是“有舍有入”的方法为好。在实际的惯导系统中，为了有效的减小量化误差，还可以采取一些“抗量化措施”。

譬如，把量化的剩余量寄存起来，等到累计到一个量化值时即进入。

2. 不可交换性误差

在第二章，我们已经介绍了转动的不可交换性的概念。转动的不可交换性说明刚体的有限转动不是矢量。因此，不能按矢量合成或分解的方法来处理转动。

假定一个动坐标系相对参考坐标系对角线轴以常值角速度转动 $\sqrt{3} \Delta\theta$ 角，如图 5-6 所示。

由 $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$

故沿坐标轴的三个分量 $\Delta\theta_x = \Delta\theta_y = \Delta\theta_z = \Delta\theta$ 。按变换四元数概念，动坐标系和参考坐标系之间的变换四元数为

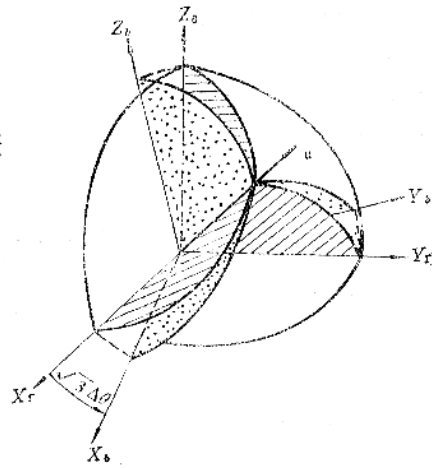


图5-6 转动的不可交换性

$$\begin{aligned} Q &= \cos \frac{\sqrt{3} \Delta\theta}{2} + u \sin \frac{\sqrt{3} \Delta\theta}{2} \\ &= \cos \frac{\sqrt{3} \Delta\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3} \Delta\theta}{2} \Delta\theta i + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3} \Delta\theta}{2} \Delta\theta j + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3} \Delta\theta}{2} \Delta\theta k \\ &= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \end{aligned}$$

式中

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{\sqrt{3} \Delta\theta}{2} \\ q_1 &= q_2 = q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3} \Delta\theta}{2} \Delta\theta \end{aligned} \right\} \tag{5-25}$$

按四元数和方向余弦的关系

$$C_i^j = \begin{bmatrix} q_1^2 + q_0^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_2^2 - q_3^2 + q_0^2 - q_1^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_3^2 - q_2^2 - q_1^2 + q_0^2 \end{bmatrix} \tag{3-28}$$

把(5-25)代入，并稍作整理得

$$C_i^j = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 + 2\cos\sqrt{3} \Delta\theta & -\sqrt{3} \sin\sqrt{3} \Delta\theta + 1 - \cos\sqrt{3} \Delta\theta \\ \sqrt{3} \sin\sqrt{3} \Delta\theta + 1 - \cos\sqrt{3} \Delta\theta & 1 + 2\cos\sqrt{3} \Delta\theta \\ -\sqrt{3} \sin\sqrt{3} \Delta\theta + 1 - \cos\sqrt{3} \Delta\theta & \sqrt{3} \sin\sqrt{3} \Delta\theta + 1 - \cos\sqrt{3} \Delta\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} \sin\sqrt{3} \Delta\theta + 1 - \cos\sqrt{3} \Delta\theta \\ -\sqrt{3} \sin\sqrt{3} \Delta\theta + 1 - \cos\sqrt{3} \Delta\theta \\ 1 + 2\cos\sqrt{3} \Delta\theta \end{bmatrix} \quad (5-26)$$

沿三个坐标轴向, 陀螺仪的输出分别为

$$\Delta\theta_x = \Delta\theta$$

$$\Delta\theta_y = \Delta\theta$$

$$\Delta\theta_z = \Delta\theta$$

考虑到在初始时刻 $C(0) = I$, 即两个坐标系重合, 则按方向余弦矩阵微分方程精确解(3-19)式, 可计算出与(5-26)式相同的结果。

如果按三个陀螺的输出分别计算, 则相应的变换矩阵分别为

$$\begin{aligned} C_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Delta\theta & -\sin\Delta\theta \\ 0 & \sin\Delta\theta & \cos\Delta\theta \end{bmatrix} \\ C_y &= \begin{bmatrix} \cos\Delta\theta & 0 & \sin\Delta\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Delta\theta & 0 & \cos\Delta\theta \end{bmatrix} \\ C_z &= \begin{bmatrix} \cos\Delta\theta & -\sin\Delta\theta & 0 \\ \sin\Delta\theta & \cos\Delta\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ C_b^i = C_x C_y C_z &= \begin{bmatrix} \cos^2\Delta\theta & -\sin\Delta\theta\cos\Delta\theta \\ \sin\Delta\theta\cos\Delta\theta + \sin^2\Delta\theta\cos\Delta\theta & \cos^2\Delta\theta - \sin^3\Delta\theta \\ \sin^2\Delta\theta - \sin\Delta\theta\cos^2\Delta\theta & \sin\Delta\theta\cos\Delta\theta + \sin^2\Delta\theta\cos\Delta\theta \\ \sin\Delta\theta & -\sin\Delta\theta\cos\Delta\theta \\ \cos^2\Delta\theta & \end{bmatrix} \quad (5-27) \end{aligned}$$

比较(5-26)和(5-27), 可以明显的看出两个式子是不相同的, 说明用分量计算所得到的结果存在着误差, 这种误差叫作不可交换性误差。在我们所讨论的情况下, 三个陀螺同时输出角增量 $\Delta\theta$, 显然, 可以有六种矩阵相乘的顺序, 即 $C_x C_y C_z, C_x C_z C_y, C_y C_x C_z, C_y C_z C_x, C_z C_x C_y, C_z C_y C_x$ 。这六种相乘的顺序, 所得的结果是不相同的, 但是和(5-26)相比, 都存在着误差。这就是我们在第二章中曾指出的, 固定增量算法存在着较大的不可交换性误差。

为了建立更清楚的概念, 假定 $\sqrt{3} \Delta\theta = 120^\circ$, 则(5-26)变为

$$C_b^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

显然, 这个变换相当于先绕 z 轴转动 90° , 再绕 x 轴转动 90° , 或者, 先绕 x 轴转动 90° , 再绕 y 轴转动 90° , 如图(5-7)所示。这样的等效连续转动, 和陀螺测量的分量 $\Delta\theta_x = \Delta\theta_y = \Delta\theta_z = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 120^\circ$ 完全不同。

减小不可交换性误差的方法, 除了选择适当的计算方法之外, 从根本上来说, 只有减小

陀螺采样的角增量，即增大采样频率，使 $\Delta\theta$ 平方以上的各项小到完全可以略掉的程度。但是，采样频率的提高，增大了计算机的负担，在实际系统设计中，只能采取折衷的方法。

3. 截断误差

在第二章中介绍的各种机上执行算法，本质上都是采用有限项级数，而把高阶项截去，其截断的部分，就是截断误差。显然，低阶算法截断误差大，高阶算法截断误差小。从降低截断误差考虑，采用高阶算法为好。但是高阶算法计算工作量大，增大计算机的负担。为了减小计算机负担，就减小计算频率，这样，又降低了计算精度，在实际系统中，要把采用的算法阶次和采样频率统一考虑。高采样频率，可以用较低阶的算法。采样频率较低时，可以用较高阶的算法。

4. 舍入误差

数字计算机的字长是有限的，大多数机载导航计算机采用 16 位字长，用双精度计算时，则为 32 位。一般说来，在定点计算机中，若表示数码的字长为 n 位，则它所能表示的最小数为

$$|N|_{\min} = \underbrace{0.00\dots\dots 01}_{n \text{ 位}} = 2^{-n}$$

它所能表示的最大数为

$$|N|_{\max} = \underbrace{0.11\dots\dots 1}_{n \text{ 位}} = 1 - 2^{-n}$$

因而它所能表示的数的范围为

$$2^{-n} \leq |N| \leq 1 - 2^{-n}$$

在运算过程中，如果实际数超过了 $|N|_{\max}$ ，即出现“溢出”现象，迫使机器停止运算。因此在机器正个运算过程中，为了避免溢出现象，要寻找恰当的“比例因子”，将可能产生溢出的数预先缩小，从而保证在整个运算过程中，所有数的绝对值均不超出机器所能表示的最大数。当机器中出现小于所能表示的最小数时，则机器就当作“零”来处理，也就是说，所有小于机器所能表示的最小数的数，都被“舍”去了。在运算中，被舍去的这些量所造成的误差就叫作舍入误差。在浮点计算机中，若用 r 位表示阶码， m 位表示尾数，则该浮点机所能表示的最小数为

$$|N|_{\min} = 2^{-2^r+1} \times 2^{-m}$$

它所能表示的最大数为

$$|N|_{\max} = 2^{2^r-1} \times (1 - 2^{-m})$$

因而浮点机所能表示的数的范围为

$$2^{-m} 2^{-2^r+1} \leq |N| \leq (1 - 2^{-m}) 2^{2^r-1}$$

浮点机所能表示的数的范围比定点机大得多。和定点机的情况一样，当机器中出现大于 $|N|_{\max}$ 的数时，计算机溢出，而对小于 $|N|_{\min}$ 的数则舍去。导航计算机多数采用浮点计算机。舍入误差的具体分析，要用统计方法进行。

二、方向余法的计算误差分析

上面介绍的四种计算误差，说明了计算误差产生的机理，但是，它们难以说明计算误差的特性，为了便于说明计算误差的特性，下面我们改用另一种方法来分析计算误差。

1. 误差评价函数

为了书写方便并使分析结果更具有—般性，我们用“ \mathbf{C} ”表示理想的变换矩阵，用“ $\hat{\mathbf{C}}$ ”表示计算的变换矩阵，把矩阵的上下标省掉，则理想矩阵和计算的矩阵的差值为： $\Delta\mathbf{C}=\mathbf{C}-\hat{\mathbf{C}}$ 。我们取 $\Delta\mathbf{C}$ 的范数为评价函数，则

$$\|\Delta\mathbf{C}\|=\|\mathbf{C}-\hat{\mathbf{C}}\|=\{\text{Tr}[(\mathbf{C}-\hat{\mathbf{C}})^T(\mathbf{C}-\hat{\mathbf{C}})]\}^{\frac{1}{2}} \quad (5-28)$$

式中符号“ Tr ”为矩阵的“迹”。

我们表示

$$\hat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}(I+\mathbf{E})$$

代入上式则

$$\|\mathbf{C}-\hat{\mathbf{C}}\|=\{\text{Tr}[\mathbf{C}-\mathbf{C}(I+\mathbf{E})]^T[\mathbf{C}-\mathbf{C}(I+\mathbf{E})]\}^{\frac{1}{2}}$$

展开并化简得

$$\|\mathbf{C}-\hat{\mathbf{C}}\|=\{\text{Tr}(\mathbf{E}^T\mathbf{E})\}^{\frac{1}{2}} \quad (5-29)$$

(5—29)式表明，用 \mathbf{E} 可以表明计算的变换矩阵偏离其理想阵的程度。我们用 e_{ij} 表示 \mathbf{E} 的元素，根据矩阵理论，一个任意矩阵，可以分解成为一个对称阵和一个反对称阵的和，这种分解可以直观的看出是成立的。我们把 \mathbf{E} 分解，可以写成

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_{11} & \frac{e_{12}+e_{21}}{2} & \frac{e_{13}+e_{31}}{2} \\ \frac{e_{21}+e_{12}}{2} & e_{22} & \frac{e_{23}+e_{32}}{2} \\ \frac{e_{13}+e_{31}}{2} & \frac{e_{32}+e_{23}}{2} & e_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{e_{21}-e_{12}}{2} & \frac{e_{13}-e_{31}}{2} \\ \frac{e_{21}-e_{12}}{2} & 0 & -\frac{e_{32}-e_{23}}{2} \\ -\frac{e_{13}-e_{31}}{2} & \frac{e_{32}-e_{23}}{2} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_{11} & S_3 & S_2 \\ S_3 & e_{22} & S_1 \\ S_2 & S_1 & e_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -V_3 & V_2 \\ V_3 & 0 & -V_1 \\ -V_2 & V_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-30)$$

式中 $S_k = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji}) \quad i=1, 2, 3$

$V_k = \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji}) \quad j=1, 2, 3, k=1, 2, 3.$

即 \mathbf{E} 可以写作

$$\mathbf{E}=\mathbf{S}_D+\mathbf{V}_D \quad (5-31)$$

代入(5—29)式得

$$\|\Delta\mathbf{C}\|=\|\mathbf{C}-\hat{\mathbf{C}}\|=[\text{Tr}(\mathbf{S}_D^T\mathbf{S}_D+\mathbf{V}_D^T\mathbf{V}_D)]^{\frac{1}{2}} \quad (5-32)$$

按照(5—29)或(5—32)式，可以用模拟仿真的方法定量的分析计算误差。见图 5—7。

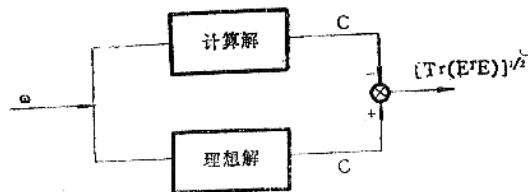


图5—7 计算误差的确定

2. 计算误差分析

两个正交坐标系之间的变换矩阵 \mathbf{C} , 是正交矩阵, 正交阵具有如下的性质:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{I}$$

表示

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

则把上式展开可得

$$\left. \begin{aligned} C_{11}^2 + C_{21}^2 + C_{31}^2 &= 1 \\ C_{12}^2 + C_{22}^2 + C_{32}^2 &= 1 \\ C_{13}^2 + C_{23}^2 + C_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (5-33a)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{11}C_{12} + C_{21}C_{22} + C_{31}C_{32} &= 0 \\ C_{12}C_{13} + C_{22}C_{23} + C_{32}C_{33} &= 0 \\ C_{13}C_{11} + C_{23}C_{21} + C_{33}C_{31} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-33b)$$

(5-33a)、(5-33b)两式就是正交阵的正交条件。(5-33a)式说明, 正交阵的列矢量(或行矢量)为单位矢量。一个坐标系轴向上的三个单位矢量经过正交阵 \mathbf{C} 变换到另一个坐标系时仍为单位矢量。即经过正交变换后矢量长度不变。(5-33b)式说明矩阵 \mathbf{C} 的三个列矢量(或行矢量)是相互正交的, 即沿一个正交坐标系轴向上的三个正交单位矢量经过 \mathbf{C} 变换后仍为一组正交矢量。

现在我们考虑有计算误差的计算矩阵 $\hat{\mathbf{C}}$, 由

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}(\mathbf{I} + \mathbf{E})$$

故

$$\hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{C}} = (\mathbf{I} + \mathbf{E}^T) \mathbf{C}^T \mathbf{C} (\mathbf{I} + \mathbf{E})$$

考虑到

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{I}$$

把上式展开并把 \mathbf{E} 看作是小量, 略掉二阶微量则有

$$\hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{I} + \mathbf{E} + \mathbf{E}^T$$

考虑到(5-30)式, 且 $\mathbf{S}_D^T = \mathbf{S}_D$, $\mathbf{V}_D^T = -\mathbf{V}_D$, 则有:

$$\hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{I} + 2\mathbf{S}_D \quad (5-34)$$

(5-34)式说明, 计算的矩阵 $\hat{\mathbf{C}}$ 已不再是正交阵, 其非正交误差为 $2\mathbf{S}_D$ 。我们定义“ \mathbf{S}_D ”为计算矩阵的非正交误差。由(5-34)式得

$$\mathbf{S}_D = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{C}} - \mathbf{I}) \quad (5-35)$$

把上式展开, 并考虑到(5-30)式的符号则得到

$$\left. \begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{2}(\hat{C}_{11}^2 + \hat{C}_{21}^2 + \hat{C}_{31}^2 - 1) \\ e_{22} &= \frac{1}{2}(\hat{C}_{12}^2 + \hat{C}_{22}^2 + \hat{C}_{32}^2 - 1) \\ e_{33} &= \frac{1}{2}(\hat{C}_{13}^2 + \hat{C}_{23}^2 + \hat{C}_{33}^2 - 1) \\ S_1 &= \hat{C}_{12}\hat{C}_{13} + \hat{C}_{22}\hat{C}_{23} + \hat{C}_{32}\hat{C}_{33} \\ S_2 &= \hat{C}_{13}\hat{C}_{11} + \hat{C}_{23}\hat{C}_{21} + \hat{C}_{33}\hat{C}_{31} \\ S_3 &= \hat{C}_{11}\hat{C}_{12} + \hat{C}_{21}\hat{C}_{22} + \hat{C}_{31}\hat{C}_{32} \end{aligned} \right\} \quad (5-36)$$

比较(5—36)、(5—33a)、(5—34)可以看出: e_{11} , e_{22} , e_{33} 为矢量长度改变的误差, 即原来一组单位矢量, 经过 $\hat{\mathbf{C}}$ 变换后, 就不再是一组单位矢量了, 故这种误差叫作刻度误差。

刻度误差也可以从物理概念上直接导出, 假设在动坐标系中有三个单位矢量分别为

$$[\mathbf{x}_{b1}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{x}_{b2}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{x}_{b3}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

把这三个矢量用矩阵 $\hat{\mathbf{C}}$ 变换到参考坐标系, 则得到

$$[\mathbf{x}_{r1}] = \begin{bmatrix} \hat{C}_{11} \\ \hat{C}_{21} \\ \hat{C}_{31} \end{bmatrix} \quad [\mathbf{x}_{r2}] = \begin{bmatrix} \hat{C}_{12} \\ \hat{C}_{22} \\ \hat{C}_{32} \end{bmatrix} \quad [\mathbf{x}_{r3}] = \begin{bmatrix} \hat{C}_{13} \\ \hat{C}_{23} \\ \hat{C}_{33} \end{bmatrix}$$

由于 $\hat{\mathbf{C}}$ 不是正交阵故 $|\mathbf{x}_{r1}| \neq 1$, 误差为

$$e_{11} = |\mathbf{x}_{r1}| - 1 \\ = (\hat{C}_{11}^2 + \hat{C}_{21}^2 + \hat{C}_{31}^2)^{\frac{1}{2}} - 1$$

表示

$$(\hat{C}_{11}^2 + \hat{C}_{21}^2 + \hat{C}_{31}^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + \hat{C}_{11}^2 + \hat{C}_{21}^2 + \hat{C}_{31}^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

令

$$\hat{C}_{11}^2 + \hat{C}_{21}^2 + \hat{C}_{31}^2 - 1 = x$$

按

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \dots$$

取前两项, 则

$$(\hat{C}_{11}^2 + \hat{C}_{21}^2 + \hat{C}_{31}^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} (\hat{C}_{11}^2 + \hat{C}_{21}^2 + \hat{C}_{31}^2 - 1)$$

代入 e_{11} 式中得

$$e_{11} = \frac{1}{2} (\hat{C}_{11}^2 + \hat{C}_{21}^2 + \hat{C}_{31}^2 - 1)$$

类似的情况, 可以得到(5—36)中的二、三两式。

比较(5—36)和(5—34)式可以看出, 如果 \mathbf{C} 是正交阵, 则 $S_1 = S_2 = S_3 = 0$, 因为 $\hat{\mathbf{C}}$ 不是正交阵。(5—36)式中后三个式子不为零, 即一组正交的矢量, 经 $\hat{\mathbf{C}}$ 变换后, 就变成一组非正交矢量了, S_1 , S_2 , S_3 的值就是误差, 这种误差可以叫作扭斜误差, 或叫作不对称误差。

扭斜误差也可以根据物理概念直接导出。如果不考虑刻度误差, 即 $|\mathbf{x}_{r1}| = |\mathbf{x}_{r2}| = |\mathbf{x}_{r3}| = 1$ 则

$$\bar{\mathbf{x}}_{r1} \cdot \bar{\mathbf{x}}_{r2} = |\mathbf{x}_{r1}| |\mathbf{x}_{r2}| \cos(\mathbf{x}_{r1}, \mathbf{x}_{r2})$$

即

$$\hat{C}_{11}\hat{C}_{12} + \hat{C}_{21}\hat{C}_{22} + \hat{C}_{31}\hat{C}_{32} = \sin[90 - (\mathbf{x}_{r1}, \mathbf{x}_{r2})] = \sin S_3$$

式中

$$S_3 = 90 - (\mathbf{x}_{r1}, \mathbf{x}_{r2})$$

考虑到 S_3 为小量, 则 $\sin S_3 \approx S_3$ 即

$$S_3 = \hat{C}_{11}\hat{C}_{12} + \hat{C}_{21}\hat{C}_{22} + \hat{C}_{31}\hat{C}_{32}$$

(5—36)中的其他两个式子 S_1 和 S_2 完全类似。即 S_i 为相应的两个矢量夹角偏离 90° 的角度。这种扭斜误差类似于加速度计和陀螺的安装误差。刻度误差和扭斜误差都是由计算矩阵 $\hat{\mathbf{C}}$ 失掉正交性所产生的。通称为非正交误差。计算矩阵 $\hat{\mathbf{C}}$ 的这种非正交误差, 可以通过周期的对计算矩阵进行正交化处理来消除。有关矩阵的正交化问题, 我们在下一章介绍。

我们把理想的变换矩阵 \mathbf{C} 的转置和 $\hat{\mathbf{C}}$ 相乘, 则得到

$$\mathbf{C}^T \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} (\mathbf{I} + \mathbf{E}) = \mathbf{I} + \mathbf{S}_D + \mathbf{V}_D \quad (5-37)$$

在 $\hat{\mathbf{C}}$ 经过正交化处理的情况下, $\mathbf{S}_D = 0$ 则:

$$\mathbf{C}^T \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{I} + \mathbf{V}_D$$

$$\text{即 } \mathbf{V}_D = \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{C}} - \mathbf{I} \quad (5-38)$$

按(5-30)式, \mathbf{V} 的元素可以写作

$$\mathbf{V}_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji}) \quad (5-39)$$

(5-38)式称作漂移误差, 漂移误差阵是一个反对称阵, 它相当于被变换后的坐标轴向三个矢量相对变换前的三个矢量分别绕三个坐标轴转动了一个小角度 u_1, u_2, u_3 。漂移误差的物理概念也很容易说明, 我们用 X, Y, Z 表示一个固定矢量在参考坐标系轴向的投影, x_1, y_1, z_1 表示由 \mathbf{C} 变换后的动坐标系轴向的投影, x_2, y_2, z_2 为由计算矩阵 $\hat{\mathbf{C}}$ 变换后的动坐标系上的投影, 则

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

故

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

上式说明 $\mathbf{C}^T \hat{\mathbf{C}}$ 为 $x_1 y_1 z_1$ 和 $x_2 y_2 z_2$ 之间的变换阵, 即 $x_1 y_1 z_1$ 和 $x_2 y_2 z_2$ 之间有一个相对转动, 由于转角为小量, 故 \mathbf{V}_D 为反对称阵的形式。漂移误差从性质上来看, 完全类似陀螺漂移。

我们考虑(3-18)式, 一步计算的变换矩阵精确解为

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta_0} \Delta\theta^{bk} + \frac{1 - \cos \Delta\theta}{\Delta\theta_0^2} (\Delta\theta^{bk})^2$$

或

$$\mathbf{C} = e^{\Delta\theta^{bk}} = \begin{bmatrix} 1 - (\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_z^2)C & \Delta\theta_x \Delta\theta_y C - \Delta\theta_z S & \Delta\theta_x \Delta\theta_x C + \Delta\theta_y S \\ \Delta\theta_x \Delta\theta_y C + \Delta\theta_z S & 1 - (\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_z^2)C & \Delta\theta_y \Delta\theta_z C - \Delta\theta_x S \\ \Delta\theta_x \Delta\theta_y C - \Delta\theta_z S & \Delta\theta_y \Delta\theta_z C + \Delta\theta_x S & 1 - (\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_z^2)C \end{bmatrix} \quad (3-54)$$

在执行机上计算时, C 和 S 都取有限项级数, 分别用 C_n 和 S_n 表示, 则当 $\sin \Delta\theta_0$ 和 $\cos \Delta\theta_0$ 分别取 1, 2, 3, 4 阶近似时, C_n 和 S_n 的值已如表 3-1 所示。此时计算的变换矩阵为

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 - (\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_z^2)C_n & \Delta\theta_x \Delta\theta_y C_n - \Delta\theta_z S_n & \Delta\theta_x \Delta\theta_x C_n + \Delta\theta_y S_n \\ \Delta\theta_x \Delta\theta_y C_n + \Delta\theta_z S_n & 1 - (\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_z^2)C_n & \Delta\theta_y \Delta\theta_z C_n - \Delta\theta_x S_n \\ \Delta\theta_x \Delta\theta_y C_n - \Delta\theta_z S_n & \Delta\theta_y \Delta\theta_z C_n + \Delta\theta_x S_n & 1 - (\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_z^2)C_n \end{bmatrix} \quad (5-40)$$

$\hat{\mathbf{C}}$ 中存在着截断误差, 按照(5-36)可计算出一步计算的刻度误差和扭斜误差分别为

$$e_i = \frac{1}{2}(\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_z^2)[S_n^2 - 2C_n + \Delta\theta_0^2 C_n^2] \quad (5-41)$$

$$i = x, y, z$$

$$S_i = -\Delta\theta_x \Delta\theta_y [S_n^2 - 2C_n + \Delta\theta_0^2 C_n^2] \quad (5-42)$$

$$i = x, y, z$$

按(5—38)和(5—39)式, 用(5—40)和(3—54)式可计算漂移误差为

$$V_i = \Delta\theta_i [S_n - S + \Delta\theta_0^2 (C_n S - S_n C_n)] \quad (5-43)$$

$$i = x, y, z$$

取表 3—1 中的 n 值, 按(5—41)(5—42)和(5—43)式可以计算出其相应的误差表达式, 如果只取非零阶的最低阶项作为误差, 则不同 n 值的误差量如表 5—1。

表5—1 误差表

n	漂移误差	扭斜误差	刻度误差
1	$-\frac{\Delta\theta_0^2}{3} \Delta\theta_i$	$-\Delta\theta_i \Delta\theta_k$	$\frac{1}{2} (\Delta\theta_i^2 + \Delta\theta_k^2)$
2	$\frac{\Delta\theta_0^2}{6} \theta_i$	$-\Delta\theta_0^2 \Delta\theta_i \Delta\theta_k$	$\frac{\Delta\theta_0^2}{8} (\Delta\theta_i^2 + \Delta\theta_k^2)$
3	$\frac{\Delta\theta_0^4}{30} \Delta\theta_i$	$\frac{\Delta\theta_0^2}{12} \Delta\theta_i \Delta\theta_k$	$-\frac{\Delta\theta_0^2}{24} (\Delta\theta_i^2 + \Delta\theta_k^2)$
4	$-\frac{\Delta\theta_0^4}{120} \Delta\theta_i$	$\frac{\Delta\theta_0^4}{72} \Delta\theta_i \Delta\theta_k$	$-\frac{\Delta\theta_0^2}{144} (\Delta\theta_i^2 + \Delta\theta_k^2)$

三、四元数法的误差分析

四元数法的计算误差分析和方向余弦矩阵的情况类似。我们用“ \mathbf{Q} ”表示理想的变换四元数, “ $\hat{\mathbf{Q}}$ ”表示计算的四元数, \mathbf{Q} 可写作

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{\Delta\theta_0}{2} + \frac{\sin \frac{\Delta\theta_0}{2}}{\Delta\theta_0} \Delta\theta \quad (5-44)$$

表示

$$C = \cos \frac{\Delta\theta_0}{2}$$

$$S = \frac{\sin \frac{\Delta\theta_0}{2}}{\Delta\theta_0}$$

如果把 $\cos \frac{\Delta\theta_0}{2}$, $\sin \frac{\Delta\theta_0}{2}$ 展成级数, 取 $n=1, 2, 3, 4$ 阶项, 则 $C=C_n$, $S=S_n$ 的值如第三章表 3—2 所列。此时

$$\mathbf{Q} = C_n + S_n \Delta\theta \quad (5-45)$$

$$= \hat{q}_0 + S_n \Delta\theta_x i + S_n \Delta\theta_y j + S_n \Delta\theta_z k$$

$$= \hat{q}_0 + \hat{q}_1 i + \hat{q}_2 j + \hat{q}_3 k$$

按四元数和方向余弦矩阵的关系, 和 $\hat{\mathbf{Q}}$ 对应的方向余弦阵为

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2 - \hat{q}_0^2 & 2(\hat{q}_1 \hat{q}_2 + \hat{q}_0 \hat{q}_3) & 2(\hat{q}_1 \hat{q}_3 - \hat{q}_0 \hat{q}_2) \\ 2(\hat{q}_1 \hat{q}_2 - \hat{q}_2 \hat{q}_3) & \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2 + \hat{q}_0^2 - \hat{q}_1^2 & 2(\hat{q}_2 \hat{q}_3 + \hat{q}_0 \hat{q}_1) \\ 2(\hat{q}_1 \hat{q}_3 + \hat{q}_0 \hat{q}_2) & 2(\hat{q}_2 \hat{q}_3 - \hat{q}_0 \hat{q}_1) & \hat{q}_3^2 - \hat{q}_2^2 - \hat{q}_1^2 + \hat{q}_0^2 \end{bmatrix} \quad (5-46)$$

按(5—46)式计算(5—36)的前三式, 得计算四元数的刻度误差为

$$e_i = \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2 + \hat{q}_0^2 - 1 \quad i=x, y, z$$

式中 $\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2 + \hat{q}_0^2 = \|\hat{Q}\|$ 是计算的四元数的“范数”。

精确的变换四元数应为规范化的四元数，即范数为 1。而计算的四元数的刻度误差，就是其范数偏离 1 的数值。可见，由于计算误差的存在，使计算的四元数失掉了规范性。这和计算的方向余弦阵由计算误差而失去正交性的情况类似。计算的方向余弦阵可以通过周期地进行正交化处理，以消除非正交误差。类似的情况，计算的四元数也可以周期地进行规范化处理，以消除刻度误差。四元数的规范化问题，我们也放在下一章介绍。

按照(5—45)式，四元数的刻度误差也可以写作

$$e_i = C_n^2 + S_n^2 \Delta\theta_i^2 - 1 \quad i=x, y, z \quad (5-46)$$

按照(5—46)式计算(5—36)的后三式可得计算四元数的扭斜误差：

$$S_i = 0$$

即计算的四元数没有扭斜误差。

下面我们讨论计算四元数的漂移误差。我们用 R^b 表示一个固定矢量在 b 坐标系轴向的分量构成的四元数，用 R^n 表示同一个矢量在 n 坐标系上的分量构成的四元数，如果 Q 是坐标系 b 和坐标系 n 之间的变换四元数，则有

$$R^n = Q \cdot R^b \cdot Q^*$$

式中 Q^* 为 Q 的共轭四元数。

现在考虑 Q 有误差，即计算的四元数 \hat{Q} ，则有

$$R^{n'} = \hat{Q} \cdot R^b \cdot \hat{Q}^*$$

或

$$R^b = \hat{Q}^* \cdot R^{n'} \cdot \hat{Q}$$

代入 R^n 式中得：

$$R^n = Q \cdot Q^* \cdot R^{n'} \cdot Q \cdot Q^*$$

定义

$$\delta Q \triangleq Q \cdot \hat{Q}^* \quad (5-47)$$

则

$$R^n = \delta Q \cdot R^{n'} \cdot \delta Q^*$$

即 n 和 n' 之间的变换四元数为 δQ 。即 n' 相对 n 有一个等效转动，我们用 ϕ 表示其转角，则有：

$$\delta Q = \cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \frac{\phi}{\phi_0}$$

考虑到 ϕ 为小量，取 $\cos \frac{\phi}{2} \approx 1$ ， $\sin \frac{\phi}{2} \approx \frac{\phi}{2}$ ，则

$$\delta Q = 1 + \frac{\phi}{2}$$

即

$$\phi = 2(Q \cdot Q^* - 1) \quad (5-48)$$

ϕ 即 n' 坐标系相对 n 坐标系转动的角度，这就是计算的四元数的漂移误差。由(5—44)和(5—45)式有

$$Q = C + S(\Delta\theta_x i + \Delta\theta_y j + \Delta\theta_z k)$$

$$\hat{Q} = C_n + S_n(\Delta\theta_x i + \Delta\theta_y j + \Delta\theta_z k)$$

代入(5—47)式，得

$$\phi = 2[C_n C + S_n S \Delta\theta_0^2 + (C C_n - C S_n)(\Delta\theta_x i + \Delta\theta_y j + \Delta\theta_z k) - 1]$$

考虑到计算的四元数经过规范化消除了刻度误差, 则有

$$C_n C + S_n S \Delta\theta_0^2 = 1$$

此时, 漂移误差为

$$\phi_i = 2(C \cdot S_n - C_n S) \Delta\theta_i \quad i = x, y, z \quad (5-49)$$

按照(5-46)和(5-49)可以计算出 $N=1, 2, 3, 4$ 阶的计算四元数的计算误差(见表5-2)

表5-2 四元数的计算误差

n	漂 移 误 差	刻 度 误 差	扭 斜 误 差
1	$-\frac{\Delta\theta_0^2}{12} \Delta\theta_i$	$\frac{1}{4} \Delta\theta_0^2$	0
2	$\frac{\Delta\theta_0^2}{24} \Delta\theta_i$	$\frac{1}{64} \Delta\theta_0^4$	0
3	$\frac{\Delta\theta_0^4}{480} \Delta\theta_i$	$-\frac{1}{192} \Delta\theta_0^4$	0
	$-\frac{\Delta\theta_0^4}{1920} \Delta\theta_i$	$-\frac{1}{4608} \Delta\theta_0^6$	0

表5-2所列的误差量, 仍是取非零阶的最低阶项。所以是近似值。

§5-3 基本误差特性

捷联式惯导系统和平台式惯导系统的主要区别, 是前者用数学平台而后者用实体物理平台, 从基本原理上来看, 两种系统没有本质的区别。因此, 在静基座上或等速直线飞行时捷联式系统的基本特性, 包括误差特性, 应和平台式惯导系统基本相同, 捷联式平台的计算误差, 如前所述, 其性质类似陀螺的安装误差、刻度误差和漂移误差。所以, 在分析误差特性时可以把计算误差归并到惯性仪表误差来考虑。由于飞行器的角运动造成的惯性仪表的动态误差, 对捷联式系统来说, 是相当严重的, 必须采用专门的补偿措施。关于误差补偿问题已在第二章介绍过了。

一、数学平台的误差方程

在捷联式惯导系统中, 姿态矩阵的基本算法, 是采用方向余弦法或四元数法。由于四元数法计算工作量较小, 所以, 实际应用中大多数都是采用四元数法, 下面我们就以四元数法为基础, 推导数学平台的误差方程。可以指出, 用方向余弦法可以得到相同的结果。

捷联式系统的姿态航向计算, 首先是解四元数微分方程, 即

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} Q \cdot \omega_{nb}^b$$

式中

$$\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - \omega_{ic}^b - \omega_{cn}^b$$

即

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} Q \cdot (\omega_{ib}^b - \omega_{ic}^b - \omega_{cn}^b) \quad (5-50)$$

(5-50)式是理想情况下的四元数微分方程, 在实际计算时, ω_{ib}^b 是用陀螺的输出 $\tilde{\omega}_{ib}^b$,

由 ω_{ie}^b 和 ω_{in}^b 则是计算得到的, 用 $\hat{\omega}_{ie}^b$ 和 $\hat{\omega}_{in}^b$ 表示, 此时, 计算的四元数微分方程为

$$\dot{\hat{Q}} = \frac{1}{2} \hat{Q} \cdot (\tilde{\omega}_{ib}^b - \hat{\omega}_{ie}^b - \hat{\omega}_{in}^b) \quad (5-51)$$

按照(5-47)式, 计算的四元数的误差四元数为

$$\delta Q = Q \cdot \hat{Q}^*$$

等式两边微分得

$$\delta \dot{Q} = \dot{Q} \cdot \hat{Q}^* + Q \cdot \dot{\hat{Q}}^*$$

把(5-50)和(5-51)代入得

$$\delta \dot{Q} = \frac{1}{2} Q \cdot (\omega_{ib}^b - \omega_{ie}^b - \omega_{in}^b) \cdot \hat{Q}^* + \frac{1}{2} Q \cdot (-\tilde{\omega}_{ib}^b + \hat{\omega}_{ie}^b + \hat{\omega}_{in}^b) \cdot \hat{Q}^*$$

考虑到

$$\omega_{ie}^b + \omega_{in}^b = Q^* \cdot (\omega_{ie}^e + \omega_{in}^n) \cdot Q$$

$$\hat{\omega}_{ie}^b + \hat{\omega}_{in}^b = \hat{Q}^* \cdot (\omega_{ie}^e + \omega_{in}^n) \cdot \hat{Q}$$

$$\delta \tilde{\omega}_{ib}^b = \tilde{\omega}_{ib}^b - \omega_{ib}^b$$

$$\delta \omega_{ib}^b = Q^* \cdot \delta \omega_{ie}^e \cdot Q$$

代入上式则

$$\begin{aligned} \delta \dot{Q} &= -\frac{1}{2} Q \cdot (\tilde{\omega}_{ib}^b - \omega_{ib}^b) \cdot \hat{Q}^* - \frac{1}{2} Q \cdot (\omega_{ie}^b + \omega_{in}^b) \cdot \hat{Q}^* + \frac{1}{2} Q \cdot (\hat{\omega}_{ie}^b + \hat{\omega}_{in}^b) \cdot \hat{Q}^* \\ &= -\frac{1}{2} \delta \omega_{ib}^b \cdot Q \cdot \hat{Q}^* - \frac{1}{2} (\omega_{ie}^e + \omega_{in}^n) \cdot Q \cdot \hat{Q}^* + \frac{1}{2} Q \cdot \hat{Q}^* \cdot (\hat{\omega}_{ie}^e + \hat{\omega}_{in}^n) \\ &= -\frac{1}{2} \delta \tilde{\omega}_{ib}^b \cdot \delta Q - \frac{1}{2} (\omega_{ie}^e + \omega_{in}^n) \cdot \delta Q + \frac{1}{2} \delta Q \cdot (\hat{\omega}_{ie}^e + \hat{\omega}_{in}^n) \end{aligned}$$

由

$$\delta Q = 1 + \frac{\phi}{2}$$

有

$$\delta \dot{Q} = \frac{\dot{\phi}}{2}$$

代入上式, 按四元数相乘展开, 并略掉二阶微量则得到

$$\dot{\phi} = -\delta \tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \tilde{\omega}_{ie}^e + \delta \tilde{\omega}_{in}^n - (\omega_{ie}^e + \omega_{in}^n) \times \phi \quad (5-52)$$

(5-52)式即数学平台误差角方程的矢量形式, 对平台式惯导系统同样也适用。用方向余弦法也可以推导出相同的结果。式中 $\delta \tilde{\omega}_{ib}^b$ 为陀螺误差, 按(5-18)式为

$$\delta \tilde{\omega}_{ib}^b = [K_g + (\Delta C_g^b)^T] \omega_{ib}^b + \epsilon$$

在分析基本误差特性时, 为了简单起见, 只考虑陀螺漂移, 则

$$\begin{aligned} -\delta \tilde{\omega}_{ib}^b &= \begin{bmatrix} -\epsilon_N \\ -\epsilon_E \\ -\epsilon_D \end{bmatrix} & \phi &= \begin{bmatrix} \phi_N \\ \phi_E \\ \phi_D \end{bmatrix} \\ \omega_{ie}^e &= \begin{bmatrix} \omega_{ie} \cos \varphi \\ 0 \\ -\omega_{ie} \sin \varphi \end{bmatrix} & \delta \omega_{ie}^e &= \begin{bmatrix} -\omega_{ie} \sin \varphi \delta \varphi \\ 0 \\ -\omega_{ie} \cos \varphi \delta \varphi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\omega_{i,n}^* = \begin{pmatrix} \frac{V_E}{R} \\ -\frac{V_N}{R} \\ -\frac{V_E}{R} \operatorname{tg} \varphi \end{pmatrix} \quad \delta \omega_{i,n}^* = \begin{pmatrix} \frac{\delta V_E}{R} \\ -\frac{\delta V_N}{R} \\ -\frac{\delta V_E}{R} \operatorname{tg} \varphi - \frac{V_E}{R} \sec^2 \varphi \delta \varphi \end{pmatrix}$$

按以上的表示把(5-22)式展开则有

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_N &= \frac{\delta V_E}{R} - \omega_{ie} \sin \varphi \delta \varphi - (\omega_{ie} \sin \varphi + \frac{V_E}{R} \operatorname{tg} \varphi) \phi_E + \frac{V_N}{R} \phi_D - \varepsilon_N \\ \dot{\phi}_E &= -\frac{\delta V_N}{R} + (\omega_{ie} \sin \varphi + \frac{V_E}{R} \operatorname{tg} \varphi) \phi_N + (\omega_{ie} \cos \varphi + \frac{V_E}{R}) \phi_D - \varepsilon_E \\ \dot{\phi}_D &= -\frac{\delta V_E}{R} \operatorname{tg} \varphi - (\omega_{ie} \cos \varphi + \frac{V_E}{R} \sec^2 \varphi) \Delta \varphi - (\omega_{ie} \cos \varphi + \\ &\quad + \frac{V_E}{R}) \phi_E - \frac{V_N}{R} \phi_N - \varepsilon_D \end{aligned} \right\} \quad (5-53)$$

二、速度误差方程

飞行器相对地球运动的加速度为

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}) \times \mathbf{v} + \mathbf{g}$$

在捷联式惯导系统中，加速度计直接安装在机体上，故上式为 $\mathbf{f} = -\mathbf{g}$

$$\dot{\mathbf{v}}^b = \tilde{\mathbf{f}}^b - (2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^b + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^b) \times \hat{\mathbf{v}}^b - \hat{\mathbf{g}}^b \quad (5-54)$$

式中 $\tilde{\mathbf{f}}^b$ 为加速度计测量的比力

$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^b, \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^b, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{g}}$ 为计算值。

我们定义加速度误差为

$$\delta \dot{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}$$

则 $\delta \dot{\mathbf{v}}^b = \tilde{\mathbf{f}}^b - \mathbf{f}^b - [(2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^b + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^b) \times \hat{\mathbf{v}}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^b + \boldsymbol{\omega}_{en}^b) \times \mathbf{v}^b] - (\hat{\mathbf{g}}^b - \mathbf{g})$

考虑

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^b = \boldsymbol{\omega}_{ie}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^b$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^b = \boldsymbol{\omega}_{en}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^b$$

$$\hat{\mathbf{v}}^b = \mathbf{v}^b + \delta \mathbf{v}^b$$

并认为

$$\hat{\mathbf{g}}^b - \mathbf{g} = 0$$

则

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}}^b &= \tilde{\mathbf{f}}^b - \mathbf{f}^b - [2(\boldsymbol{\omega}_{ie}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^b) \times (\mathbf{v}^b + \delta \mathbf{v}^b) \\ &\quad - (\boldsymbol{\omega}_{en}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^b) \times (\mathbf{v}^b + \delta \mathbf{v}^b) - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^b + \boldsymbol{\omega}_{en}^b) \times \mathbf{v}^b] \end{aligned}$$

把上式展开并略掉二阶微量得

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^b = \tilde{\mathbf{f}}^b - \mathbf{f}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^b + \boldsymbol{\omega}_{en}^b) \times \delta \mathbf{v}^b - (2\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^b) \times \mathbf{v}^b$$

把 $\delta \dot{\mathbf{v}}$ 从 b 坐标系变换到 n 坐标系则有

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}}^n &= \hat{\mathbf{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{f}}^b \cdot \hat{\mathbf{Q}}^* - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{f}^b \cdot \mathbf{Q}^* - \mathbf{Q} \cdot [(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^b + \boldsymbol{\omega}_{en}^b) \times \delta \mathbf{v}^b + \\ &\quad (2\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^b) \times \mathbf{v}^b] \cdot \mathbf{Q}^* \end{aligned}$$

考虑

$$\tilde{\mathbf{f}}^b = \mathbf{f}^b + \delta \mathbf{f}^b$$

则

$$\hat{\mathbf{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{f}}^b \cdot \hat{\mathbf{Q}}^* = \hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{f}^b \cdot \hat{\mathbf{Q}}^* + \hat{\mathbf{Q}} \cdot \delta \mathbf{f}^b \cdot \hat{\mathbf{Q}}^*$$

由

$$\mathbf{f}^b = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{f}^n \cdot \mathbf{Q}$$

则

$$\begin{aligned}\delta f^b &= Q^* \cdot \delta f^n \cdot Q \\ \hat{Q} \cdot \tilde{f}^b \cdot \hat{Q}^* &= \hat{Q} \cdot Q^* \cdot f^n \cdot Q \cdot \hat{Q}^* + \hat{Q} \cdot Q^* \cdot \delta f^n \cdot Q \cdot \hat{Q}^* \\ &= \delta Q^* \cdot f^n \cdot \delta Q + \delta Q^* \cdot \delta f^n \cdot \delta Q\end{aligned}$$

由 $\delta Q = 1 + \frac{\phi}{2}$, 把上式展开并略掉二阶微量则有

$$\hat{Q} \cdot \tilde{f}^b \cdot \hat{Q}^* = f^n + f^n \times \phi + \delta f^n$$

故

$$\begin{aligned}\delta \dot{V}^n &= \delta f^n + f^n \times \phi - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \delta V^n \\ &\quad - (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times V^n\end{aligned}\quad (5-55)$$

式中 δf^n 为加速度计误差在 n 坐标系内的表示。按(5-17)式有

$$\delta f^n = [K_a + (\Delta C_a^b)^T] f^n + \nabla^n$$

在分析基本误差特性时, 为了简单起见, 可以只考虑加速度计的零位误差即

$$\nabla = [\nabla_N \ \nabla_E \ \nabla_D]^T$$

考虑到

$$\begin{aligned}f^n &= [f_N \ f_E \ f_D]^T \\ \phi &= [\phi_N \ \phi_E \ \phi_D]^T \\ \omega_{ie}^n &= [\omega_{ie} \cos\varphi \ 0 \ -\omega_{ie} \sin\varphi]^T \\ \delta V^n &= [\delta V_N \ \delta V_E \ \delta V_D]^T \\ \delta\omega_{ie}^n &= [-\omega_{ie} \sin\varphi \delta\varphi \ 0 \ -\omega_{ie} \cos\varphi \delta\varphi]^T \\ \omega_{en}^n &= \left[\frac{V_E}{R} \quad -\frac{V_N}{R} \quad -\frac{V_E}{R} \operatorname{tg}\varphi \right]^T\end{aligned}$$

$$\delta\omega_{en}^n = \left[\frac{\delta V_E}{R}, \quad -\frac{\delta V_N}{R}, \quad -\frac{\delta V_E \operatorname{tg}\varphi}{R} - \frac{V_E}{R} \sec^2\varphi \delta\varphi \right]^T$$

把(5-55)式展开写成分量的形式得

$$\left. \begin{aligned}\delta \dot{V}_N &= -f_D \phi_E + f_E \phi_D + \nabla_N - 2(\omega_{ie} \sin\varphi + \frac{V_E}{R} \operatorname{tg}\varphi) \delta V_E \\ &\quad - (2\omega_{ie} \cos\varphi + \frac{V_E}{R} \sec^2\varphi) V_E \delta\varphi + \frac{V_N}{R} \delta V_D + \frac{V_D}{R} \delta V_N \\ \delta \dot{V}_E &= f_D \phi_N - f_N \phi_D + \nabla_E + (2\omega_{ie} \sin\varphi + \frac{V_E}{R} \operatorname{tg}\varphi) \delta V_N \\ &\quad + (\frac{V_N}{R} \operatorname{tg}\varphi + \frac{V_D}{R}) \delta V_E + (2\omega_{ie} V_N \cos\varphi + \frac{V_E}{R} V_N \sec^2\varphi \\ &\quad - 2\omega_{ie} V_D \sin\varphi) \delta\varphi \\ \delta \dot{V}_D &= f_N \phi_E - f_E \phi_N + \nabla_D - 2(\omega_{ie} \cos\varphi + \frac{V_E}{R}) \delta V_E \\ &\quad - 2\frac{V_N}{R} \delta V_N + 2V_E \omega_{ie} \sin\varphi \delta\varphi\end{aligned}\right\} \quad (5-56)$$

三、位置误差方程

由

$$\varphi = \frac{V_N}{R}$$

故
$$\delta\varphi = \frac{\delta V_n}{R} \quad (5-57)$$

由
$$\lambda = \frac{V_E}{R} \sec\varphi$$

故
$$\delta\lambda = \frac{\delta V_E}{R} \sec\varphi + \frac{V_E}{R} \sec\varphi \operatorname{tg}\varphi \delta\varphi \quad (5-58)$$

四、系统误差方程

(5-53), (5-56), (5-57)和(5-58)式合在一起就构成捷联式惯导系统的误差方程。由于惯导系统的垂直通道是发散的, 通常不用。所以 $\delta\dot{V}_D$ 可以不考虑。表示

$$\mathbf{X}(t) = [\phi_N, \phi_E, \phi_D, \delta V_N, \delta V_E, \delta\varphi, \delta\lambda]^T$$

$$\mathbf{B}(t) = [-\varepsilon_N, -\varepsilon_E, -\varepsilon_D, \nabla_N, \nabla_E, 0, 0]^T$$

则系统误差方程可以写作

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t) \quad (5-59)$$

式中

$$F_{11} = 0$$

$$F_{12} = -(\omega_{ie} \sin\varphi + \frac{V_E}{R} \operatorname{tg}\varphi)$$

$$F_{13} = \frac{V_n}{R}$$

$$F_{14} = 0$$

$$F_{15} = \frac{1}{R}$$

$$F_{16} = -\omega_{ie} \sin\varphi$$

$$F_{17} = 0$$

$$F_{21} = \omega_{ie} \sin\varphi + \frac{V_E}{R} \operatorname{tg}\varphi$$

$$F_{22} = 0$$

$$F_{23} = \omega_{ie} \cos\varphi + \frac{V_E}{R}$$

$$F_{24} = -\frac{1}{R}$$

$$F_{25} = 0$$

$$F_{26} = 0$$

$$F_{27} = 0$$

$$F_{31} = -\frac{V_N}{R}$$

$$F_{32} = -(\omega_{ie} \cos\varphi + \frac{V_E}{R})$$

$$F_{33} = 0$$

$$F_{34} = 0$$

$$F_{35} = -\frac{1}{R} \operatorname{tg}\varphi$$

$$F_{36} = -(\omega_{ie} \cos\varphi + \frac{V_E}{R} \sec^2\varphi)$$

$$F_{37} = 0$$

$$F_{41} = 0$$

$$F_{42} = -f_D$$

$$F_{43} = f_E$$

$$F_{44} = \frac{V_D}{R}$$

$$F_{45} = -2(\omega_{ie} \sin\varphi + \frac{V_E}{R} \operatorname{tg}\varphi)$$

$$F_{46} = -(2\omega_{ie} \cos\varphi + \frac{V_E}{R} \sec^2\varphi) V_E$$

$$F_{47} = 0$$

$$F_{51} = f_D$$

$$F_{52} = 0$$

$$F_{53} = -f_N$$

$$F_{54} = 2\omega_{ie} \sin\varphi + \frac{V_E}{R} \operatorname{tg}\varphi$$

$$\begin{aligned}
 F_{55} &= \frac{V_N}{R} \operatorname{tg} \varphi + \frac{V_D}{R} & F_{56} &= 2\omega_{ie} V_N \cos \varphi + \frac{V_E V_N}{R} \sec^2 \varphi - 2\omega_{ie} V_D \sin \varphi \\
 F_{57} &= 0 & F_{61} &= 0 \\
 F_{62} &= 0 & F_{63} &= 0 \\
 F_{64} &= \frac{1}{R} & F_{65} &= 0 \\
 F_{66} &= 0 & F_{67} &= 0 \\
 F_{71} &= F_{72} = F_{73} = F_{74} = 0 & F_{75} &= \frac{1}{R} \sec \varphi \\
 F_{76} &= \frac{V_E}{R} \sec \varphi \operatorname{tg} \varphi & F_{77} &= 0
 \end{aligned}$$

可以看出, 由于 $F_{i7} (i=1, 2, \dots, 7) = 0$, 所以 $\delta \lambda$ 是在系统回路之外, 不影响系统的动态特性, 可以不考虑。另外, 为了简单起见, 我们考虑系统在静基座的情况, 即

$$V_N = V_E = V_D = 0$$

$$f_N = f_E = 0$$

$$f_D = -g$$

此时方程(5—59)简化为

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_N \\ \dot{\phi}_E \\ \dot{\phi}_D \\ \delta \dot{V}_N \\ \delta \dot{V}_E \\ \dot{\delta \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{ie} \sin \varphi & 0 & 0 & \frac{1}{R} & -\omega_{ie} \sin \varphi \\ \omega_{ie} \sin \varphi & 0 & \omega_{ie} \cos \varphi & -\frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_{ie} \cos \varphi & 0 & 0 & -\frac{1}{R} \operatorname{tg} \varphi & -\omega_{ie} \cos \varphi \\ 0 & g & 0 & 0 & -2\omega_{ie} \sin \varphi & 0 \\ -g & 0 & 0 & 2\omega_{ie} \sin \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_N \\ \phi_E \\ \phi_D \\ \delta V_N \\ \delta V_E \\ \delta \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\varepsilon_N \\ -\varepsilon_E \\ -\varepsilon_D \\ \nabla_N \\ \nabla_E \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5-60)$$

五、误差传播特性

把(5—60)式写作如下形式

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)$$

取拉氏变换得

$$S\mathbf{X}(S) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{F}\mathbf{X}(S) + \mathbf{B}(S)$$

即

$$\mathbf{X}(S) = (SI - \mathbf{F})^{-1} [\mathbf{X}(0) + \mathbf{B}(S)] \quad (5-61)$$

系统的特征方程为

$$\begin{aligned}
 \Delta(S) &= |SI - \mathbf{F}| = S^4(S^2 + \omega_{ie}^2) + 4\omega_{ie}^2 \sin^2 \varphi S^2(S^2 + \omega_{ie}^2) + \\
 &+ 2\frac{g}{R} S^2(S^2 + \omega_{ie}^2) + \frac{g^2}{R^2}(S^2 + \omega_{ie}^2) \\
 &= (S^2 + \omega_{ie}^2)(S^4 + 4\omega_{ie}^2 \sin^2 \varphi S^2 + 2\frac{g}{R} S^2 + \frac{g^2}{R^2}) \\
 &= (S^2 + \omega_{ie}^2)[S^4 + 2S^2(\omega_{ie}^2 + 2\omega_{ie}^2 \sin^2 \varphi) + \omega_{ie}^4]
 \end{aligned}$$

式中 $\omega_s^2 = \frac{g}{R}$ 称作舒拉角频率。

令 $\Delta(S) = 0$

有 $(S^2 + \omega_{ie}^2)[S^4 + 2S^2(\omega_s^2 + 2\omega_{ie}^2 \sin^2 \varphi) + \omega_s^4] = 0$

即 $S^2 + \omega_{ie}^2 = 0$ (5-62)

$$S^4 + 2S^2(\omega_s^2 + 2\omega_{ie}^2 \sin^2 \varphi) + \omega_s^4 = 0 \quad (5-63)$$

由(5-62)式得

$$S_{1,2} = \pm j\omega_{ie}$$

这是一个等幅振荡，其振荡角频率为地球角速率。故振荡周期为

$$T_e = \frac{2\pi}{\omega_{ie}} = 24 \text{ 小时}$$

考虑到 $\omega_s = 1.24 \times 10^{-3}$ 1/秒， $\omega_{ie} = 0.729 \times 10^{-4}$ 1/秒，即 $\omega_s \gg \omega_{ie}$ ，则(5-63)式近似的分解为

$$[S^2 + (\omega_s + \omega_{ie} \sin \varphi)^2][S^2 + (\omega_s - \omega_{ie} \sin \varphi)^2] = 0$$

即 $S_{3,4} = \pm j(\omega_s + \omega_{ie} \sin \varphi)$

$$S_{5,6} = \pm j(\omega_s - \omega_{ie} \sin \varphi)$$

这四个根表示系统中还包含有角频率为 $\omega_s + \omega_{ie} \sin \varphi$ 和 $\omega_s - \omega_{ie} \sin \varphi$ 的两种振荡运动，由于 $\omega_s \gg \omega_{ie} \sin \varphi$ ，即系统误差中包括两种频率相近的正弦分量，它们合在一起就产生差频，如

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{总}} &= \alpha(0) \sin(\omega_s + \omega_{ie} \sin \varphi)t + \alpha(0) \sin(\omega_s - \omega_{ie} \sin \varphi)t \\ &= 2\alpha(0) \cos(\omega_{ie} \sin \varphi)t \cdot \sin \omega_s t \end{aligned}$$

即产生一个频率为 ω_s 的振荡，而其幅值为 $[2\alpha_0 \cos(\omega_{ie} \sin \varphi)t]$ ，即其振荡幅是随 $\cos(\omega_{ie} \sin \varphi)t$ 而变化的。因此，合成的振荡具调幅的性质。

对应角频率 ω_s 的振荡叫舒拉振荡，其振荡周期为 84.4 分。对应于角频率 $\omega_{ie} \sin \varphi$ 的振荡叫作付科振荡，其振荡周期为

$$T_P = \frac{2\pi}{\omega_{ie} \sin \varphi}$$

当 $\varphi = 45^\circ$ 时 $T_P = 34$ 小时。

综上所述，捷联式惯导系统的误差特性，包括有三种振荡即舒拉振荡、地球周期振荡、和付科周期振荡。这些基本特性，对捷联式惯导系统和平台式惯导系统都是一样的。

付科振荡是速度误差中的 $2\omega_{ie} \sin \varphi \delta V_N$ 和 $2\omega_{ie} \sin \varphi \delta V_E$ 两项引起的，如果为了简单起见不考虑这两项，则误差特性中就不再包括付科振荡。此时，系统特征方程变为

$$\Delta(S) = (S^2 + \omega_{ie}^2)(S^2 + \omega_s^2) = 0$$

在不考虑付科振荡的情况下，系统误差方程(5-60)变为

$$\begin{pmatrix} \phi_N \\ \dot{\phi}_E \\ \dot{\phi}_D \\ \delta\dot{V}_N \\ \delta\dot{V}_E \\ \delta\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{ie}\sin\varphi & 0 & 0 & \frac{1}{R} & -\omega_{ie}\sin\varphi \\ \omega_{ie}\sin\varphi & 0 & \omega_{ie}\cos\varphi & -\frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_{ie}\cos\varphi & 0 & 0 & -\frac{1}{R}\operatorname{tg}\varphi & -\omega_{ie}\cos\varphi \\ 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_N \\ \phi_E \\ \phi_D \\ \delta V_N \\ \delta V_E \\ \delta\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\varepsilon_N \\ -\varepsilon_E \\ -\varepsilon_D \\ \nabla_N \\ \nabla_E \\ 0 \end{pmatrix}$$

(5-64)

(5-60)和(5-64)式都是考虑系统在静基座情况下的误差方程, ω_{ie} , φ , R , g 都是常值。所以, 这两个误差方程都是线性定常微分方程。用拉氏变换的方法求解比较方便, 如(5-61)式, 我们表示

$$\mathbf{C} = (\mathbf{S}\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}$$

按(5-64)式, 用矩阵求逆的方法可得:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S(S^2 + \omega_{ie}^2 \cos^2 \varphi)}{(S^2 + \omega_s^2)(S^2 + \omega_{ie}^2)} & C_{12} &= \frac{-S^2 \omega_{ie} \sin \varphi}{(S^2 + \omega_s^2)(S^2 + \omega_{ie}^2)} \\ C_{13} &= \frac{S \omega_{ie}^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(S^2 + \omega_s^2)(S^2 + \omega_{ie}^2)} & C_{14} &= 0 \\ C_{15} &= \frac{1}{R(S^2 + \omega_s^2)} & C_{16} &= \frac{S^2 \omega_{ie} \sin \varphi}{(S^2 + \omega_s^2)(S^2 + \omega_{ie}^2)} \\ C_{21} &= \frac{S^2 \omega_{ie} \sin \varphi}{(S^2 + \omega_s^2)(S^2 + \omega_{ie}^2)} & C_{22} &= \frac{S^2}{(S^2 + \omega_s^2)(S^2 + \omega_{ie}^2)} \\ C_{23} &= \frac{S^2 \omega_{ie} \cos \varphi}{(S^2 + \omega_s^2)(S^2 + \omega_{ie}^2)} & C_{24} &= \frac{1}{R(S^2 + \omega_s^2)} \\ C_{25} &= 0 & C_{26} &= \frac{Sg \omega_{ie} \sin \varphi}{(S^2 + \omega_s^2)(S^2 + \omega_{ie}^2)} \\ C_{31} &= \frac{S(\omega_{ie}^2 \sin \varphi \cos \varphi - \omega_s^2 \operatorname{tg} \varphi)}{(S^2 + \omega_{ie}^2)(S^2 + \omega_{ie}^2)} & C_{32} &= \frac{\omega_{ie}(S^2 \cos \varphi + \omega_s \sec \varphi)}{(S^2 + \omega_s^2)(S^2 + \omega_{ie}^2)} \\ C_{33} &= \frac{S(S^2 + \omega_s^2 + \omega_{ie}^2 \sin^2 \varphi)}{(S^2 + \omega_{ie}^2)(S^2 + \omega_s^2)} & C_{34} &= 0 \\ C_{35} &= \frac{\operatorname{tg} \varphi}{R(S^2 + \omega_s^2)} & C_{36} &= \frac{\omega_{ie}(S^2 \cos \varphi + \omega_s^2 \sec \varphi)}{(S^2 + \omega_s^2)(S^2 + \omega_{ie}^2)} \\ C_{41} &= \frac{Sg \omega_{ie} \sin \varphi}{(S^2 + \omega_s^2)(S^2 + \omega_{ie}^2)} & C_{42} &= \frac{S^2 g}{(S^2 + \omega_s^2)(S^2 + \omega_{ie}^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{43} &= \frac{Sg\omega_{ie}\cos\varphi}{(S^2+\omega_s^2)(S^2+\omega_{ie}^2)} & C_{44} &= \frac{S}{S^2+\omega_s^2} \\
C_{45} &= 0 & C_{46} &= -\frac{g\omega_{ie}^2}{(S^2+\omega_s^2)(S^2+\omega_{ie}^2)} \\
C_{51} &= -\frac{g(S^2+\omega_{ie}^2)\cos^2\varphi}{(S^2+\omega_s^2)(S^2+\omega_{ie}^2)} & C_{52} &= \frac{S\omega_{ie}\sin\varphi g}{(S^2+\omega_s^2)(S^2+\omega_{ie}^2)} \\
C_{53} &= -\frac{g\omega_{ie}^2\sin\varphi\cos\varphi}{(S^2+\omega_s^2)(S^2+\omega_{ie}^2)} & C_{54} &= 0 \\
C_{55} &= \frac{S}{S^2+\omega_s^2} & C_{56} &= \frac{S\omega_s^2}{(S^2+\omega_s^2)(S^2+\omega_{ie}^2)} \\
C_{61} &= \frac{\omega_s^2\omega_{ie}\sin\varphi}{(S^2+\omega_s^2)(S^2+\omega_{ie}^2)} & C_{62} &= \frac{S\omega_s^2}{(S^2+\omega_s^2)(S^2+\omega_{ie}^2)} \\
C_{63} &= \frac{-\omega_s^2\omega_{ie}\cos\varphi}{(S^2+\omega_s^2)(S^2+\omega_{ie}^2)} & C_{64} &= \frac{1}{R(S^2+\omega_s^2)} \\
C_{65} &= 0 & C_{66} &= \frac{S(S^2+\omega_s^2+\omega_{ie}^2)}{(S^2+\omega_s^2)(S^2+\omega_{ie}^2)}
\end{aligned}$$

有了上述式子之后，则按(5—61)式可以求出系统的误差特性。经度误差可由下式得到

$$\delta\lambda = \frac{1}{R\cos\varphi} \int \delta V_E dt$$

考虑 δV_E 的初值为零，取拉氏变换后得

$$\delta\lambda(S) = \frac{\sec\varphi}{RS} \delta V_E(S).$$

即知道了 $\delta V_E(S)$ 的特性即可求出 $\delta\lambda(S)$ 的特性。

1. 陀螺漂移引起的系统误差

考虑陀螺漂移为常值，并考虑到经度误差，则陀螺漂移引起的系统误差方程为

$$\begin{pmatrix} \phi_N(S) \\ \phi_E(S) \\ \phi_D(S) \\ \delta V_N(S) \\ \delta V_E(S) \\ \delta\lambda(S) \\ \delta\varphi(S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} \\ \frac{\sec\varphi}{RS}C_{51} & \frac{\sec\varphi}{RS}C_{52} & \frac{\sec\varphi}{RS}C_{53} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon_N}{S} \\ -\frac{\varepsilon_E}{S} \\ -\frac{\varepsilon_D}{S} \end{pmatrix} \quad (5-65)$$

把(5—65)式展开，代入 C_{ij} 的表达式，经过拉氏反变换则得到系统误差。

$$\begin{aligned}
\phi_N(t) &= \frac{-\omega_{ie}\sin\varphi}{\omega_s^2-\omega_{ie}^2} (\cos\omega_s t - \cos\omega_{ie} t) \varepsilon_E + \\
&+ \left[-\frac{\omega_s^2-\omega_{ie}^2\cos^2\varphi}{\omega_s(\omega_s^2-\omega_{ie}^2)} \sin\omega_s t + \frac{\omega_{ie}\sin^2\varphi}{\omega_s^2-\omega_{ie}^2} \sin\omega_{ie} t \right] \varepsilon_N - \\
&- \frac{\omega_{ie}\sin\varphi\cos\varphi}{\omega_s^2-\omega_{ie}^2} (\sin\omega_{ie} t + \frac{\omega_{ie}}{\omega_s} \sin\omega_s t) \varepsilon_D \quad (5-65a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_E(t) = & \frac{-1}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\omega_s \sin \omega_s t - \omega_{ie} \sin \omega_{ie} t) e_E - \frac{\omega_{ie} \sin \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\cos \omega_{ie} t - \\ & - \cos \omega_s t) e_N - \frac{\omega_{ie} \cos \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\cos \omega_s t - \cos \omega_{ie} t) e_D \end{aligned} \quad (5-66b)$$

$$\begin{aligned} \phi_D(t) = & \left[\frac{\sec \varphi}{\omega_{ie}} (1 - \cos \omega_{ie} t) + \frac{\omega_{ie} \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\cos \omega_s t - \cos \omega_{ie} t) \right] e_N - \\ & - \frac{\omega_{ie}^2 \sin \varphi \cos \varphi - \omega_s^2 \operatorname{tg} \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \left(\frac{1}{\omega_{ie}} \sin \omega_{ie} t - \frac{1}{\omega_s} \sin \omega_s t \right) e_N - \\ & - \left[\frac{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2 \cos^2 \varphi}{\omega_{ie} (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2)} \sin \omega_{ie} t - \frac{\omega_{ie}^2 \sin^2 \varphi}{\omega_s (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2)} \sin \omega_s t \right] e_D \end{aligned} \quad (5-66c)$$

$$\begin{aligned} \delta V_N(t) = & \frac{-g}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\cos \omega_{ie} t - \cos \omega_s t) e_E - \frac{g \sin \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\sin \omega_{ie} t - \\ & - \frac{\omega_{ie}}{\omega_s} \sin \omega_s t) e_N - \frac{g \cos \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\sin \omega_{ie} t - \frac{\omega_{ie}}{\omega_s} \sin \omega_s t) e_D \end{aligned} \quad (5-66d)$$

$$\begin{aligned} \delta V_E(t) = & \frac{-g \sin \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\sin \omega_{ie} t - \frac{\omega_{ie}}{\omega_s} \sin \omega_s t) e_E - \left(\frac{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2 \cos \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \cos \omega_s t - \right. \\ & - \frac{\omega_s^2 \sin^2 \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\cos \omega_{ie} t - \cos^2 \varphi) R e_N - \sin \varphi \cos \varphi R \left(\frac{\omega_s^2}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \cos \omega_{ie} t - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\omega_{ie}^2}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \cos \omega_s t - 1 \right) e_D \end{aligned} \quad (5-66e)$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi(t) = & \frac{-\omega_s^2}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \left(\frac{1}{\omega_{ie}} \sin \omega_{ie} t - \frac{1}{\omega_s} \sin \omega_s t \right) e_E - \left[\frac{\omega_s^2 \omega_{ie} \sin \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \left(\frac{1}{\omega_s^2} \cos \omega_s t - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\omega_{ie}^2} \cos \omega_{ie} t \right) + \frac{\sin \varphi}{\omega_{ie}} \right] e_N - \left[\frac{\omega_s^2 \cos \varphi}{\omega_{ie} (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2)} \cos \omega_{ie} t - \right. \\ & \left. - \frac{\omega_{ie} \cos \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \cos \omega_s t - \frac{\cos \varphi}{\omega_{ie}} \right] e_D \end{aligned} \quad (5-66f)$$

$$\begin{aligned} \delta \lambda(t) = & \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\omega_{ie}} (1 - \cos \omega_{ie} t) - \frac{\omega_{ie} \operatorname{tg} \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\cos \omega_{ie} t - \cos \omega_s t) \right] e_E - \\ & - \left[\frac{\sec \varphi (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2 \cos^2 \varphi)}{\omega_s (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2)} \sin \omega_s t - \frac{\omega_s^2 \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi}{\omega_{ie} (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2)} \sin \omega_{ie} t - \right. \\ & \left. - t \cos \varphi \right] e_N - \left[\frac{\omega_s^2 \sin \varphi}{\omega_{ie} (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2)} \sin \omega_{ie} t - \frac{\omega_s^2 \sin \varphi}{\omega_s (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2)} \sin \omega_s t - \right. \\ & \left. - t \sin \varphi \right] e_D \end{aligned} \quad (5-66d)$$

从以上(5-66 a)到(5-66 d)的误差表达式可以看出,由陀螺常值漂移引起的数学平台的两个水平误差角都是振荡的。其振荡频率为舒拉频率和地球频率。 e_N 和 e_D 引起的平台方位误差角也是振荡的。但是 e_E 则引起常值的方位误差角。陀螺漂移引起的 δV_N 都是振荡的,而 e_N 和 e_D 都引起 δV_E 具有常值分量。同样的情况, e_N 和 e_D 也引起 $\delta \varphi$ 具有常值分量。

陀螺漂移对 $\delta\lambda$ 影响较大, 除振荡分量外, e_E 还产生 $\delta\lambda$ 的常值分量, 而 e_n 和 e_D 则还产生随时间增长的 $\delta\lambda$ 。即陀螺漂移 e_N 和 e_D 产生随时间增长的经度误差。

2. 加速度的零位误差引起的导航误差

考虑加速度计零位误差为常值, 则加速度计零位引起的导航误差方程为:

$$\begin{pmatrix} \phi_N(S) \\ \phi_E(S) \\ \phi_D(S) \\ \delta V_N(S) \\ \delta V_E(S) \\ \delta\lambda(S) \\ \delta\varphi(S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{14} & C_{15} \\ C_{24} & C_{25} \\ C_{34} & C_{35} \\ C_{44} & C_{45} \\ C_{54} & C_{55} \\ \frac{\sec\varphi}{RS} C_{54} & \frac{\sec\varphi}{RS} C_{55} \\ C_{64} & C_{65} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\nabla_N}{S} \\ \frac{\nabla_E}{S} \end{bmatrix} \quad (5-67)$$

按上式展开, 并通过拉氏反变换得

$$\left. \begin{aligned} \phi_N(t) &= \frac{V_E}{g} (1 - \cos\omega_s t) \\ \phi_E(t) &= -\frac{V_N}{g} (1 - \cos\omega_s t) \\ \phi_D(t) &= \frac{\nabla_E \operatorname{tg}\varphi}{g} (1 - \cos\omega_s t) \\ \delta V_N(t) &= \frac{\nabla_N}{\omega_s} \sin\omega_s t \\ \delta V_E(t) &= \frac{\nabla_E}{\omega_s} \sin\omega_s t \\ \delta\lambda(t) &= \frac{\nabla_E \sec\varphi}{g} (1 - \cos\omega_s t) \\ \delta\varphi(t) &= \frac{\nabla_N}{g} (1 - \cos\omega_s t) \end{aligned} \right\} (5-68)$$

(5-68) 式说明, 常值加速计零位误差引起的系统误差是舒拉振荡的。除速度误差外, 其他误差都具有常值分量。

3. 初始误差对系统误差的影响

我们考虑初始条件误差 $\phi_N(0)$, $\phi_E(0)$, $\phi_D(0)$, $\delta V_N(0)$, $\delta V_E(0)$, $\delta\varphi(0)$ 均为常值, 由于 $\delta\lambda$ 是开环的, 初始误差对其他参数无影响, 所以不考虑 $\delta\lambda(0)$, 则初始条件引起的系统误差方程为

$$\begin{pmatrix} \phi_N(S) \\ \phi_E(S) \\ \phi_D(S) \\ \delta V_N(S) \\ \delta V_E(S) \\ \delta\lambda(S) \\ \delta\varphi(S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ \frac{\sec\varphi}{RS} C_{51} & \frac{\sec\varphi}{RS} C_{52} & \frac{\sec\varphi}{RS} C_{53} & \frac{\sec\varphi}{RS} C_{54} & \frac{\sec\varphi}{RS} C_{55} & \frac{\sec\varphi}{RS} C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \phi_N(0) \\ \phi_E(0) \\ \phi_D(0) \\ \delta V_N(0) \\ \delta V_E(0) \\ \delta\varphi(0) \end{bmatrix} \quad (5-69)$$

把(5-69)式展开, 并进行拉氏反变换得

$$\begin{aligned}
 \phi_N(t) = & \frac{\delta V_E(0)}{R\omega_s} \sin\omega_s t + \frac{\omega_{ie} \sin\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\omega_{ie} \sin\omega_{ie} t - \omega_s \sin\omega_s t) \phi_E(0) \\
 & + \left[\frac{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2 \cos^2\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \cos\omega_s t - \frac{\omega_{ie}^2 \sin^2\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \cos\omega_{ie} t \right] \phi_N(0) \\
 & + \left[\frac{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2 \cos^2\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \cos\omega_{ie} t - \frac{\omega_{ie}^2 \sin^2\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \cos\omega_s t \right] \phi_D(0) \\
 & + \frac{\omega_{ie} \sin\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\omega_{ie} \sin\omega_{ie} t - \omega_s \sin\omega_s t) \delta\varphi(0) \quad (5-70a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_E(t) = & -\frac{\delta V_N(0)}{\omega_s} \sin\omega_s t + \frac{1}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\omega_s^2 \cos\omega_s t - \omega_{ie}^2 \cos\omega_{ie} t) \phi_E(0) \\
 & + \frac{\omega_{ie} \sin\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\omega_s \sin\omega_s t - \omega_{ie} \sin\omega_{ie} t) \phi_N(0) \\
 & + \frac{\omega_{ie} \cos\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\omega_{ie} \sin\omega_{ie} t - \omega_s \sin\omega_s t) \phi_D(0) \\
 & + \frac{\omega_{ie}^2}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\cos\omega_s t - \cos\omega_{ie} t) \delta\varphi(0) \quad (5-70b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_D(t) = & \frac{\delta V_E(0) \operatorname{tg}\varphi}{R\omega_s} \sin\omega_s t + \left[\frac{\omega_s^2 - \sec\varphi - \omega_{ie}^2 \cos\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \sin\omega_{ie} t \right. \\
 & - \left. \frac{\omega_{ie} \omega_s \sin\varphi \operatorname{tg}\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \sin\omega_s t \right] \phi_E(0) \\
 & + \frac{\omega_{ie}^2 \cos\varphi \sin\varphi - \omega_s^2 \operatorname{tg}\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} [\cos\omega_{ie} t - \cos\omega_s t] \phi_N(0) \\
 & + \left(\frac{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2 \cos^2\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \cos\omega_{ie} t - \frac{\omega_{ie}^2 \sin^2\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \cos\omega_s t \right) \phi_D(0) \\
 & + \frac{\cos\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \left[(\omega_s^2 \sec^2\varphi - \omega_{ie}^2) \sin\omega_{ie} t - \omega_{ie} \omega_s^2 \operatorname{tg}^2\varphi \sin\omega_s t \right] \delta\varphi(0) \quad (5-70c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta V_N(t) = & \delta V_N(0) \cos\omega_s t + \frac{g}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\omega_s \sin\omega_s t - \omega_{ie} \sin\omega_{ie} t) \phi_E(0) \\
 & + \frac{g\omega_{ie} \sin\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} [\cos\omega_{ie} t - \cos\omega_s t] \phi_N(0) \\
 & + \frac{g\omega_{ie} \cos\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\cos\omega_s t - \cos\omega_{ie} t) \phi_D(0) \\
 & + \frac{R}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\omega_s^2 \omega_s \sin\omega_s t - \omega_{ie} \omega_s^2 \sin\omega_{ie} t) \delta\varphi(0) \quad (5-70d)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta V_E(0) = & \delta V_E(0) \cos\omega_s t + \frac{\omega_{ie} g \sin\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\cos\omega_{ie} t - \cos\omega_s t) \phi_E(0) \\
 & + \left[\frac{\omega_{ie} g \sin^2\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \sin\omega_{ie} t - \frac{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2 \cos^2\varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \sin\omega_s t \right] \phi_N(0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{R \sin \varphi \cos \varphi \omega_s \omega_{ie}}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\omega_{ie} \sin \omega_s t - \omega_s \sin \omega_{ie} t) \phi_D(0) \\
& + \frac{g \omega_{ie} \sin \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\cos \omega_{ie} t - \cos \omega_s t) \delta \varphi(0) \quad (5-70e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \varphi(t) = & \frac{\delta V_N}{\omega_s} \sin \omega_s t + \frac{\omega_s^2}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\cos \omega_{ie} t - \cos \omega_s t) \phi_E(0) \\
& + \frac{\omega_s^2 \omega_{ie} \sin \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \left(\frac{1}{\omega_{ie}} \sin \omega_{ie} t - \frac{1}{\omega_s} \sin \omega_s t \right) \phi_N(0) \\
& + \frac{\omega_s \cos \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\omega_{ie} \sin \omega_s t - \omega_s \sin \omega_{ie} t) \phi_D(0) \\
& + \frac{1}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\omega_s^2 \cos \omega_{ie} t - \omega_{ie}^2 \cos \omega_s t) \delta \varphi(0) \quad (5-70f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \lambda(t) = & \frac{\delta V_E(0)}{R} \frac{\sec \varphi}{\omega_s} \sin \omega_s t + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\omega_s^2 \sin \omega_{ie} t \\
& - \omega_{ie} \omega_s \sin \omega_s t) \phi_E(0) + \left[\frac{\sec \varphi (\omega_s^2 - \omega_{ie}^2 \cos^2 \varphi)}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \cos \omega_s t \right. \\
& \left. - \frac{\omega_s^2 \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \cos \omega_{ie} t - \cos \varphi \right] \phi_N(0) + \left[\frac{\omega_s^2 \sin \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \cos \omega_{ie} t \right. \\
& \left. - \frac{\omega_{ie}^2 \sin \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} \cos \omega_s t - \sin \varphi \right] \phi_D(0) + \frac{\omega_s \operatorname{tg} \varphi}{\omega_s^2 - \omega_{ie}^2} (\omega_s \sin \omega_{ie} t \\
& - \omega_{ie} \sin \omega_s t) \delta \varphi(0) + \delta \lambda(0) \quad (5-70g)
\end{aligned}$$

从(5-70)式可以清楚地看出, 初始条件引起的系统误差特性除 $\phi_D(0)$, $\phi_N(0)$, $\delta \lambda(0)$ 引起常值的经度误差外, 其他系统误差都是振荡的。其中由 $\delta V_E(0)$ 和 $\delta V_N(0)$ 引起的误差都是舒拉振荡的, 而其他初始条件引起的振荡误差则包含有舒拉周期和地球周期两种振荡。

以上的分析都是考虑系统在静基座上的情况, 即飞行器停留在地面静止不动的情况, 在这种情况下, 捷联式惯导系统和平台式惯导系统具有完全相同的误差特性。但是在飞行过程中两种系统在性能上会有明显的差别。这些差别主要有:

1. 捷联式系统惯性仪表的误差明显的增加了。前面已经提到过, 飞行器的角运动产生严重的动态误差。捷联式陀螺大的施矩速率, 使力矩器的标度系数误差大为增加。总之, 由于惯性仪表固定在飞行器上, 飞行器的动态环境造成惯性仪表很大的误差。

2. 捷联式系统对惯性仪表的地面校准比较困难, 不象平台式系统可以通过对平台施矩使平台相对重力 g 和地球自转角速度处在任意方位, 以便把重力和地球自转角速度在惯性仪表输入轴向的分量和惯性仪表的输出相比较, 从而确定惯性仪表的误差并进行校正。而捷联式系统由于惯性仪表固定在飞行器上, 因而不便于进行这种飞行前的校准。惯性仪表的校准只能是把仪表从飞行器上取下来在实验室内进行。使用过程中, 依靠仪表性能的稳定性。或者使用外部信息, 在飞行过程中进行校准。

3. 在捷联式系统中, 惯性仪表固定在飞行器, 因此惯性仪表的误差也可以看作是和飞行器固联的。如果惯性仪表的误差是常值, 则在导航坐标系(如地理坐标系)轴向的等效惯

性仪表误差则是飞行器角运动的函数，随着飞行器的运动在地理坐标系轴向的等效惯性仪表误差将是时间的函数。

由于捷联式系统的上述特点，所以使捷联式系统和平台式系统在导航性能上会有明显的不同。尽管误差方程的形式基本相同，但是，在飞行过程中，两类系统误差特性是不同的。捷联式系统的误差传播特性随着飞行轨迹的不同而不同。

§ 5—4 随机误差源引起的系统误差

在实际的惯导系统中，对常值陀螺漂移和加速度计的常值零位误差是可以通过补偿方法加以消除的，而陀螺漂移和加速度计误差中的随机部分，由于无法预先补偿，因此就成为产生系统误差的主要误差源，这一节我们分析随机误差源引起的系统误差特性。

一、陀螺漂移的误差模型

陀螺漂移的误差模型一般可以看作是随机常数、随机斜坡、和指数相关(马尔柯夫过程)的随机误差的组合。这些随机成分通常称作有色噪声，这些有色噪声也是控制理论中常碰到的非白噪声。几种典型的有色噪声

方块图见图 5—8。

1. 随机常数

一个连续随机常数可表示为

$$\dot{x}(t) = 0 \quad (5-71)$$

与其相应的离散过程可写成

$$x_{k+1} = x_k \quad (5-72)$$

随机常数表示初始条件是一个随机变量，因而相当于一个没有输入但有随机的初始值的积分器的输出(见图 5—8a)。

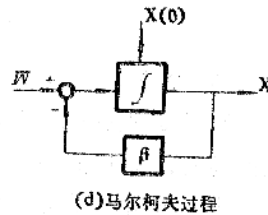
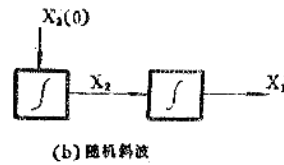
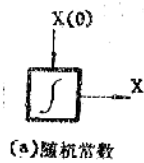


图5—8 有色噪声方块图

2. 随机斜坡

随机过程随时间线性增长，但是增长的斜率则是具有一定概率分布的随机量。随机斜坡可用下列方程描述：

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (5-73)$$

$$\dot{x}_2(t) = 0$$

相应的离散方程为

$$\left. \begin{aligned} x_{1(k+1)} &= x_{1k} + (t_{k+1} - t_k)x_{2k} \\ x_{2(k+1)} &= x_{2k} \end{aligned} \right\} \quad (5-74)$$

连续随机斜坡的方块图见图 5—8 b。

3. 随机游动

一个白噪声过程，通过一个积分器，则积分器的输出就不再是一个白噪声过程了。如果输入的白噪声过程具有零均值和平稳的正态分布，则输出就称为维纳过程。这种维纳过程也叫作随机游动。表示为

$$\dot{x}(t) = W(t) \tag{5-75}$$

式中 $W(t)$ 为白噪声过程。

随机游动的方块图见图 5-8c。

4. 指数相关的随机过程

指数相关的随机过程是其相关函数为指数形式

$$R(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta\tau}$$

式中 σ^2 为随机过程的方差, $1/\beta$ 为过程的相关时间。这种指数相关的随机过程可以用由白噪声输入的线性系统输出来表示, 即

$$\dot{x}(t) = -\beta x(t) + W(t) \tag{5-76}$$

显然, 这是一个一阶马尔柯夫过程。如果 $W(t)$ 具有高斯分布, 则 $x(t)$ 亦为高斯分布, 称作高斯马尔柯夫过程。其方块图见图 5-8d。其相应的离散方程为

$$x_{k+1} = e^{-\beta(t_{k+1}-t_k)} x_k + W_k \tag{5-77}$$

陀螺仪漂移误差模型包括随机常数、随机斜坡、长相关时间的指数相关随机分量和短相关时间的指数相关随机分量。用五个状态量表示的陀螺漂移误差模型方块图如图 5-9。

对某种具体型号的陀螺, 其漂移误差模型是通过大量的测试数据经过数据处理来确定的。在进行一般分析时, 为了简单起见, 通常把陀螺漂移看作是随机常数和一阶马尔柯夫过程组成, 即

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(t) &= \varepsilon_c + \varepsilon_r \\ \dot{\varepsilon}_c &= 0 \\ \dot{\varepsilon}_r(t) &= -\beta_c \varepsilon_r(t) + W_1(t) \end{aligned} \right\} \tag{5-78}$$

二、加速度表随机误差模型

加速度计的随机误差模型是由随机偏置、随机斜坡和两种马尔柯夫过程的组合, 同陀螺漂移的误差模型类似。在简单的情况下, 可以考虑为一个一阶马尔柯夫过程, 即

$$\dot{\nu}(t) = -\mu \nu(t) + W_2(t) \tag{5-79}$$

式中 $\nu(t)$ ——加速度计的随机误差。

μ ——反相关时间。

$W_2(f)$ ——白噪声。

三、系统状态方程和均方差分析

对系统有色噪声 $\varepsilon(t)$ 和 $\nu(t)$ 我们采用(5-78)和(5-79)的模型, 并把这两种有色噪声作为状态量考虑, 则扩充状态之后的系统动态方程变为

$$\dot{X}_1(t) = F_1(t) X_1(t) + W_1(t) \tag{5-80}$$

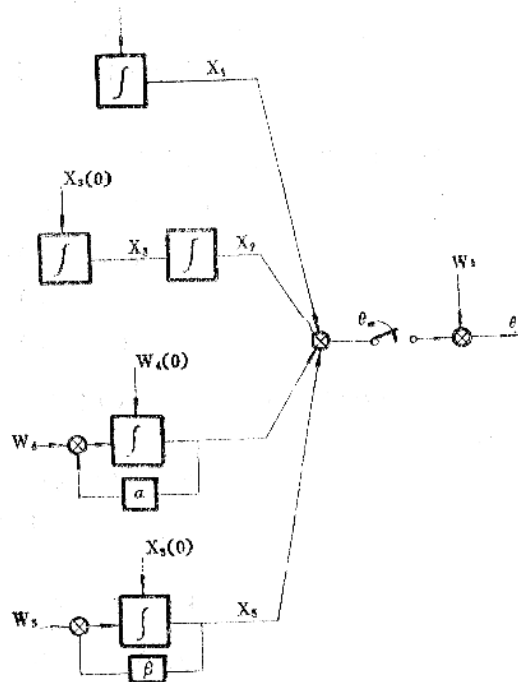


图5-9 陀螺漂移误差模型方块图

式中

$$\mathbf{X}_1 = [\phi_N, \phi_E, \phi_D, \delta V_N, \delta V_E, \delta \varphi, \delta \lambda, \varepsilon_{Nc}, \varepsilon_{Ec}, \varepsilon_{Dc}, \varepsilon_{Nr}, \varepsilon_{Er}, \varepsilon_{Dr}, V_N, V_E]^T$$

$$\mathbf{W}_1(t) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, W_{1N}, W_{1E}, W_{1D}, W_{2N}, W_{2E}]^T$$

$\mathbf{F}_1(t)$ 中除和(5—59)式相同的项外, 再增加:

$$\begin{aligned} F(11, 11) &= -\beta_N, & F(12, 12) &= -\beta_E, \\ F(13, 13) &= -\beta_D, & F(14, 14) &= -\mu_n, \\ F(15, 15) &= -\mu_E, & & \text{其他增加的元素为零。} \end{aligned}$$

把(5—80)式写成离散方程则有:

$$\mathbf{X}_1(k+1) = \boldsymbol{\phi}(k+1/k)\mathbf{X}_1(k) + \boldsymbol{\Gamma}(k+1/k)\mathbf{W}(k) \quad (5-81)$$

式中

$\boldsymbol{\phi}(k+1/k)$ 为系统状态转移阵

$\boldsymbol{\Gamma}(k+1/k)$ 为系统噪声转移阵

按(5—81)式定义系统的均方差为

$$\mathbf{P}(k+1) = E[\mathbf{X}_1(k+1)\mathbf{X}_1^T(k+1)] \quad (5-82)$$

式中 $E[\]$ 为数学期望(即均值)的符号。

把(5—81)式代入(5—82)中得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1) &= \boldsymbol{\phi}(k+1/k) E[\mathbf{X}_1(k)\mathbf{X}_1^T(k)] \boldsymbol{\phi}^T(k+1/k) \\ &+ \boldsymbol{\phi}(k+1/k) E[\mathbf{X}_1(k)\mathbf{W}^T(k)] \boldsymbol{\Gamma}^T(k+1/k) \\ &+ \boldsymbol{\Gamma}(k+1/k) E[\mathbf{W}(k)\mathbf{X}_1^T(k)] \boldsymbol{\phi}^T(k+1/k) \\ &+ \boldsymbol{\Gamma}(k+1/k) E[\mathbf{W}(k)\mathbf{W}^T(k)] \boldsymbol{\Gamma}^T(k+1/k) \end{aligned}$$

考虑到 $\{\mathbf{W}(k); k \geq 0\}$ 与 $X_2(0)$ 不相关, 因此, 对一切 $k \geq 0$, $\mathbf{W}(k)$ 与 $\mathbf{X}(k)$ 也不相关, 故有

$$\mathbf{P}(k+1) = \boldsymbol{\phi}(k+1/k)\mathbf{P}(k)\boldsymbol{\phi}^T(k+1/k) + \boldsymbol{\Gamma}(k+1/k)\mathbf{Q}(k)\boldsymbol{\Gamma}^T(k+1/k) \quad (5-83)$$

式中

$$\mathbf{P}(k) = E[\mathbf{X}_1(k)\mathbf{X}_1^T(k)] \quad k \text{ 时刻的状态均方差。}$$

$$\mathbf{Q}(k) = E[\mathbf{W}(k)\mathbf{W}^T(k)] \quad \text{系统噪声均方差。}$$

按(5—83)式即可以计算出在随机噪声作用下系统的均方误差。 $\mathbf{P}(k+1)$ 对角线上的元素即为相应状态量的均方差。

四、计算举例

为了简单起见, 我们考虑一个单轴的情况, 其误差方程为

$$\frac{\delta V_E}{R} = -\frac{g}{R}\phi_N + V_E$$

$$\phi_N = \frac{\delta V_E}{R} + \varepsilon_N$$

把加速表误差 V_E 和陀螺漂移 ε_N 都考虑作为指数自相关的有色噪声，分别表示为

$$\dot{\varepsilon}_N = -\mu_c \varepsilon + \sqrt{2A_c \mu_c} \eta_1$$

$$\dot{V}_E = -\mu_a V_E + \sqrt{2A_a \mu_a} \eta_2$$

式中 $A_c = \sigma_c^2$ 陀螺随机漂移方差。

$A_a = \sigma_a^2$ 加速度表随机误差方差。

η_1, η_2 强度为 1 的白噪声。

$$\text{协方差 } \text{cov}[\eta(t), \eta(\tau)] = 1$$

把 ε_N 和 V_E 扩充为状态，则状态方程为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{G}\mathbf{W}$$

式中

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{g}{R} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_a \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sqrt{2A_c \mu_c} & 0 \\ 0 & \sqrt{2A_a \mu_a} \end{pmatrix}$$

系统噪声的协方差阵

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

取下列参数值

$$R = 6370 \times 10^3 \text{ 米}, \quad g = 9.81 \text{ 米/秒}^2,$$

$$\sigma_c = 0.01 \text{ 角秒/秒}, \quad \mu_c = 0.1 \times 10^{-2} \text{ 1/秒},$$

$$\sigma_a = 0.1 \times 10^{-4} \text{ 角秒/秒}^2, \quad \mu_a = 0.1 \times 10^{-1} \text{ 1/秒}.$$

在初始时刻，系统的状态变量是统计独立的，则初始协方差阵 $P(0)$ 为对角线阵，其对角元素为

$$P_{11}(0) = \sigma_{\phi_N}^2(0) = 0$$

$$P_{22}(0) = \sigma_{\varepsilon_N}^2(0) = (120 \text{ 角秒})^2 = 1.44 \times 10^4 \text{ 角秒}^2$$

$$P_{33}(0) = \sigma_{V_E}^2(0) = 0.1 \times 10^{-3} \text{ 角秒}^2/\text{秒}^2$$

$$P_{44}(0) = \sigma_{\phi_N}^2(0) = 0.1 \times 10^{-3} \text{ 角秒}^2/\text{秒}^4$$

用以上参数和初始条件，计算(5—83)式，则所得结果如图 5—10 和 5—11 所示。计算结果说明，在随机误差源的作用下，系统误差是随时间增长的，用解析的方法可以证明是和 \sqrt{t} 成比例。系统误差仍保持有振荡的特性，其振荡频率为 2 倍的舒位频率。以上分析是静基座的情况，在飞行过程中飞行器的运动同样会影响这种误差的特性。这是捷联式系统的特点。

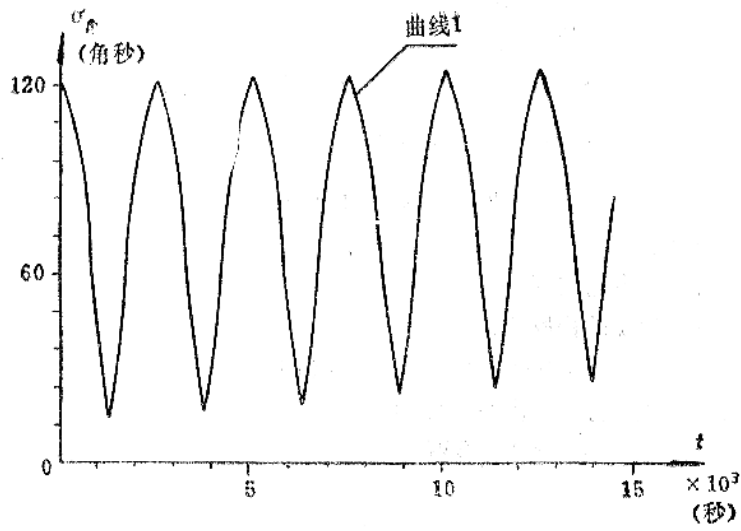


图5-10 平台误差角(均方根)曲线

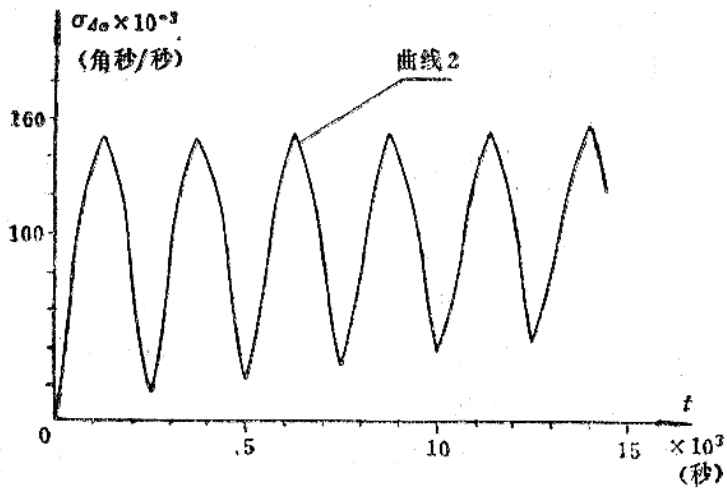


图5-11 速度误差(均方根)曲线

第六章 方向余弦矩阵的正交化和四元数的规范化

上一章我们讨论了计算变换矩阵和变换四元数中的计算误差。计算误差使计算得到的变换矩阵失去正交性，从而产生刻度误差和扭斜误差。计算误差使计算的变换四元数失去规范性，从而产生刻度误差。为了消除这些计算误差，需要周期的对计算的变换矩阵进行正交化处理，对计算的变换四元数进行规范化处理，这一章我们介绍变换矩阵的正交化，和变换四元数的规范化。

§ 6-1 方向余弦矩阵的最优正交化

方向余弦矩阵的最优正交化，就是找一个最接近计算矩阵的正交阵。最接近的概念是正交阵和计算阵的差值范数最小。即欧几里德空间的距离最短。

我们用 $\hat{\mathbf{C}}$ 表示计算的方向余弦矩阵， \mathbf{C}_0 表示正交化后的方向余弦矩阵，如果有

$$\|\mathbf{C}_0 - \hat{\mathbf{C}}\| \text{ 最小或: } \|\mathbf{C}_0 - \hat{\mathbf{C}}\|^2 \text{ 最小}$$

则我们称 \mathbf{C}_0 是 $\hat{\mathbf{C}}$ 的最优正交化矩阵。

$$\|\mathbf{C}_0 - \hat{\mathbf{C}}\| \triangleq \{Tr[(\mathbf{C}_0 - \hat{\mathbf{C}})^T(\mathbf{C}_0 - \hat{\mathbf{C}})]\}^{\frac{1}{2}} \quad (6-1)$$

$$\|\mathbf{C}_0 - \hat{\mathbf{C}}\|^2 \triangleq Tr[(\mathbf{C}_0 - \hat{\mathbf{C}})^T(\mathbf{C}_0 - \hat{\mathbf{C}})] \quad (6-2)$$

正交化的矩阵 \mathbf{C}_0 应满足正交条件即

$$\mathbf{C}_0^T \mathbf{C}_0 = \mathbf{I}$$

一、方向余弦矩阵最优正交化的精确解

最优正交化的方向余弦矩阵，可以用许多不同的方法求得，这里我们介绍两种比较简单的方法。

1. 用最小二乘法求最优正交化矩阵

按照(6-2)式，表示

$$N = Tr[(\mathbf{C}_0 - \hat{\mathbf{C}})^T(\mathbf{C}_0 - \hat{\mathbf{C}})]$$

N 是个标量函数，把 \mathbf{C}_0 作为变量，求标量函数 N 对 \mathbf{C}_0 的导数，并令其为零，则可得到使 N_{min} 的 \mathbf{C}_0 。这时 \mathbf{C}_0 就是最优正交化矩阵。

由

$$\begin{aligned} N &= Tr[(\mathbf{C}_0 - \hat{\mathbf{C}})^T(\mathbf{C}_0 - \hat{\mathbf{C}})] \\ &= Tr[\mathbf{C}_0^T \mathbf{C}_0 - \mathbf{C}_0^T \hat{\mathbf{C}} - \hat{\mathbf{C}}^T \mathbf{C}_0 + \hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{C}}] \end{aligned}$$

故

$$\frac{\partial N}{\partial \mathbf{C}_0} = Tr\left[-\frac{\partial \mathbf{C}_0^T}{\partial \mathbf{C}_0} \hat{\mathbf{C}} - \hat{\mathbf{C}}^T \frac{\partial \mathbf{C}_0}{\partial \mathbf{C}_0}\right] \quad (6-3)$$

由

$$\mathbf{C}_0^T \mathbf{C}_0 = \mathbf{I}$$

故

$$\frac{\partial \mathbf{C}_0^T}{\partial \mathbf{C}_0} \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_0^T \frac{\partial \mathbf{C}_0}{\partial \mathbf{C}_0} = 0$$

即
$$\frac{\partial \mathbf{C}_0}{\partial \mathbf{C}_0} = -\mathbf{C}_0 \frac{\partial \mathbf{C}_0^T}{\partial \mathbf{C}_0} \mathbf{C}_0$$

代入(6—3)式得

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{C}_0} = \text{Tr} \left[-\frac{\partial \mathbf{C}_0^T}{\partial \mathbf{C}_0} \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{C}}^T \mathbf{C}_0 \frac{\partial \mathbf{C}_0^T}{\partial \mathbf{C}_0} \mathbf{C}_0 \right]$$

根据

$$\begin{aligned} \text{Tr}(ABCD) &= \text{Tr}(BCDA) \\ &= \text{Tr}(CDAB) \\ &= \text{Tr}(DABC) \end{aligned}$$

故

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{C}_0} = \text{Tr} \left[\frac{\partial \mathbf{C}_0^T}{\partial \mathbf{C}_0} (\mathbf{C}_0 \hat{\mathbf{C}}^T \mathbf{C}_0 - \hat{\mathbf{C}}) \right]$$

令

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{C}_0} = 0$$

得

$$\mathbf{C}_0 \hat{\mathbf{C}}^T \mathbf{C}_0 - \hat{\mathbf{C}} = 0$$

满足这个方程的解为

$$\mathbf{C}_0 = (\hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{C}}^T)^{-\frac{1}{2}} (\hat{\mathbf{C}}^T)^{-1} \quad (6-4)$$

(6—4)式即为最优正交化矩阵的解析形式。把计算的 $\hat{\mathbf{C}}$ 按(6—4)计算出 \mathbf{C}_0 ，即为矩阵的正交化处理。

2. 用矩阵的极分解求最优正交化矩阵。

(1) 矩阵极分解的概念。

定理一 把一个满秩的实矩阵分解成一个正定矩阵和一个正交矩阵的乘积，这样的分解总是可能的并且是唯一的。

设有一个实矩阵 \mathbf{A} ，则 \mathbf{A} 可以分解成

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (6-5)$$

或

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{R}} \quad (6-6)$$

式中 \mathbf{R} , $\tilde{\mathbf{R}}$ 为正定矩阵

\mathbf{U} , $\tilde{\mathbf{U}}$ 为正交矩阵。

(6—5)(6—6)式的严格数学证明，我们这里不做了。但可以验证性的说明其正确性。

由(6—5)式有

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}$$

故

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{U}^T &= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A})^T \\ &= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{R}^{-T} \end{aligned}$$

如果取 $\mathbf{R} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{\frac{1}{2}}$ 为正定阵

则

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$$

故

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}$$

即 如果 \mathbf{R} 为正定阵，则 \mathbf{U} 为正交阵。

再由

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U}$$

则有

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{R}^T$$

如果 \mathbf{U} 为正交阵则 $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}$ ，故

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^2$$

即 $\mathbf{R} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{\frac{1}{2}}$ 为对称阵。

类似的情况，如取 $\tilde{\mathbf{R}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{\frac{1}{2}}$ 则可以证明(6-6)式也是成立的。

定理二 设 \mathbf{M}_r 是一组 $r \times r$ 阶正交矩阵的集合，对任意一个 $r \times r$ 阶矩阵有

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{R} \quad \tilde{\mathbf{U}} \in \mathbf{M}_r, \mathbf{R} \text{ 为实正定阵。}$$

则对任何其他正交阵 $\mathbf{Q} \in \mathbf{M}_r$ 有

$$\|\tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{A}\|_E \leq \|\mathbf{Q} - \mathbf{A}\|_E \quad (6-7)$$

式中 $\|\cdot\|_E$ —欧几里德范数。

把以上两个定理应用到矩阵的正交化，使

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{A} \quad \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{C}_0$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = (\hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{C}})^{\frac{1}{2}}$$

则按(6-5)式有

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_0 (\hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{C}})^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{即 } \mathbf{C}_0 = \hat{\mathbf{C}} (\hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{C}})^{-\frac{1}{2}} \quad (6-8)$$

按定理二， $\|\mathbf{C}_0 - \hat{\mathbf{C}}\|_{\min}$ ，故 \mathbf{C}_0 为最接近 $\hat{\mathbf{C}}$ 的正交阵，即最优正交阵。

类似的情况，如使： $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{A}$ ， $\mathbf{C}_0 = \mathbf{U}$ ， $\mathbf{R} = (\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{C}}^T)^{\frac{1}{2}}$ 则按(6-6)式有

$$\hat{\mathbf{C}} = (\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{C}}^T)^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}_0$$

$$\text{即 } \mathbf{C}_0 = (\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{C}}^T)^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{C}} \quad (6-9)$$

把(6-9)式等号两边转置并求逆则有

$$(\mathbf{C}_0^T)^{-1} = \{[(\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{C}}^T)^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{C}}]^T\}^{-1}$$

考虑 \mathbf{C}_0 是正交阵，故 $\mathbf{C}_0^T = \mathbf{C}_0^{-1}$ ， $(\mathbf{C}_0^T)^{-1} = \mathbf{C}_0$ ，

$$\text{故 } \mathbf{C}_0 = \{\hat{\mathbf{C}}^T (\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{C}}^T)^{-\frac{1}{2}}\}^{-1}$$

$$\text{由 } (\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{C}}^T)^{\frac{1}{2}} \text{ 是对称阵，故 } (\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{C}}^T)^{\frac{T}{2}} = (\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{C}}^T)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{故 } \mathbf{C}_0 = (\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{C}}^T)^{\frac{1}{2}} (\hat{\mathbf{C}}^T)^{-1} \quad \text{即(6-4)式。}$$

(6-4)(6-8)(6-9)三式即为方向余弦矩阵最优正交化的三种解析形式。

二、方向余弦矩阵最优正交化的级数解。

(6-4)，(6-8)和(6-9)式所表示的最优正交化矩阵中，都有矩阵开方的问题，而在数字计算机上进行矩阵开方的计算是非常麻烦的。为了避免在计算机上进行矩阵开方的计算，通常矩阵的正交化都是采用级数形式的近似解。

按照(6-8)式，定义一个误差阵

$$\tilde{\mathbf{E}} \triangleq \hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{C}} - \mathbf{I}$$

则(6-8)式可以写成

$$\mathbf{C}_0 = \hat{\mathbf{C}} (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{E}})^{-\frac{1}{2}}$$

把上式展成级数则有

$$C_0 = \hat{C} \left[I - \frac{1}{2}E + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}E^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}E^3 + \dots \right] \quad (6-10)$$

(6-10)式即最优正交阵的级数形式，实际使用时取三项就够了。

如果按(6-4)式，定义一个误差阵

$$\tilde{E} = \hat{C}\hat{C}^T - I$$

则(5-4)式可以写成

$$C_0 = (I + \tilde{E})^{\frac{1}{2}} (\hat{C}^T)^{-1}$$

展成级数则有

$$C_0 = \left[I + \frac{1}{2}\tilde{E} - \frac{1}{2 \cdot 4}\tilde{E}^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\tilde{E}^3 + \dots \right] (\hat{C}^T)^{-1} \quad (6-11)$$

和(6-10)式类似，实际使用时取三项就够了。

三、方向余弦矩阵最优正交化的迭代法

按(6-11)式取前两项有

$$C_0 = \left[I + \frac{1}{2}(\hat{C}\hat{C}^T - I) \right] (\hat{C}^T)^{-1}$$

如果把 \hat{C} 看作初值用 X_n 表示， C_0 作为一步迭代值用 X_{n+1} 表示，则

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \left[I + \frac{1}{2}(X_n X_n^T - I) \right] (X_n^T)^{-1} \\ &= (X_n^T)^{-1} + \frac{1}{2} X_n X_n^T (X_n^T)^{-1} - (X_n^T)^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{即有} \quad X_{n+1} = \frac{1}{2} [(X_n^T)^{-1} + X_n] \quad (6-12)$$

(6-12)式即方向余弦矩阵最优正交化的迭代形式，一次迭代相当于取级数的前两项，如迭代两次，则相当于取级数的前三项，所以，一般情况下，对(6-12)式进行两次迭代计算就可以了。这样，在数字机上进行矩阵正交化处理就比较方便了。

(6-12)式也可以按照如下的概念推导出来。一个正交化的方向余弦矩阵 X_{n+1} ，满足正交特性，即

$$X_{n+1} X_{n+1}^T = I$$

如果把 X_{n+1} 阵的每一行写作一个矢量。即

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad X_{n+1}^T = [a \quad b \quad c]$$

则

$$X_{n+1} X_{n+1}^T = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} [a \quad b \quad c] = \begin{bmatrix} a \cdot a & a \cdot b & a \cdot c \\ b \cdot a & b \cdot b & b \cdot c \\ c \cdot a & c \cdot b & c \cdot c \end{bmatrix} = I$$

故

$$a \cdot a = 1 \quad b \cdot b = 1 \quad c \cdot c = 1$$

即 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三个为单位矢量。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$$

即 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 相互正交。故有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a}, \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

即正交阵的三个矢量是三个相互垂直的单位矢量。当矩阵不是正交阵时，则三个行矢量不正交，在一般情况下也不是单位矢量。此时

$$\mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^T - \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{E}}$$

我们用 $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0$ 表示 \mathbf{X}_n 的三个行矢量，由于 \mathbf{X}_n 不是正交阵，故 $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0$ 不正交而且一般情况下也不是单位矢量，见图(6-1)。矩阵 \mathbf{X}_n 的正交化可按以下三个步骤进行

第一步 求出

$$\mathbf{c}'_0 = \mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}'_0 = \mathbf{c}_0 \times \mathbf{a}_0$$

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{b}_0 \times \mathbf{c}_0$$

第二步 取平均值

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \frac{\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}'_0}{2} & \mathbf{b}_1 &= \frac{\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}'_0}{2} \\ \mathbf{c}_1 &= \frac{\mathbf{c}_0 + \mathbf{c}'_0}{2} \end{aligned} \right\} (6-13)$$

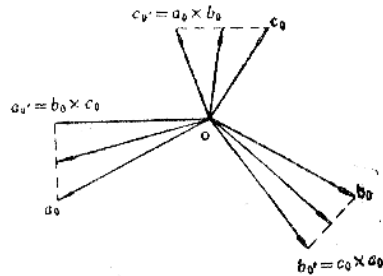


图6-1 矩阵正交化

第三步 规范化 把 $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1$ 变成单位矢量。

按以上三步重复进行，则多次重复之后则可以得到基本正交的三个单位矢量。这三个单位矢量的元素所构成矩阵即为正交阵。

考虑

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_0 &= \mathbf{b}_0 \times \mathbf{c}_0 \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_{0x} & b_{0y} & b_{0z} \\ c_{0x} & c_{0y} & c_{0z} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b_{0y} & b_{0z} \\ c_{0y} & c_{0z} \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} b_{0x} & b_{0z} \\ c_{0x} & c_{0z} \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} b_{0x} & b_{0y} \\ c_{0x} & c_{0y} \end{vmatrix} k \end{aligned}$$

所以， \mathbf{a}'_0 为 \mathbf{a}_0 的子式构成的行。同理 $\mathbf{b}'_0, \mathbf{c}'_0$ 分别是 \mathbf{b}_0 和 \mathbf{c}_0 的子式构成的行。故有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}'_0 \\ \mathbf{b}'_0 \\ \mathbf{c}'_0 \end{bmatrix} = \text{adj}[\mathbf{X}_n^T] \quad \text{伴随矩阵}$$

按(6-13)式，可以写成

$$\mathbf{X}_{n+1} = \frac{1}{2} \text{adj}[\mathbf{X}_n^T] + \frac{1}{2} \mathbf{X}_n$$

由

$$\mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{X}|} \text{adj} \mathbf{X}$$

考虑到 \mathbf{X} 为近似正交阵, 故 $|\mathbf{X}| \approx 1$, 则上式可以写作:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{X}_n^T)^{-1} + \frac{1}{2}\mathbf{X}_n$$

即(6—12)式。

如果按(6—10)式取前项则

$$\mathbf{c}_0 = \hat{\mathbf{C}} \left[I - \frac{1}{2}\bar{\mathbf{E}} \right]$$

将 $\bar{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{C}} - I$ 代入得

$$\mathbf{c}_0 = \hat{\mathbf{C}} \left[I - \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{C}} - I) \right]$$

写成迭代形式

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n \left[I - \frac{1}{2}\mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n + \frac{I}{2} \right]$$

即

$$\mathbf{X}_{n+1} = \frac{3}{2}\mathbf{X}_n - \frac{1}{2}\mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n \quad (6-14)$$

(6—14)是矩阵正交化的另一种迭代形式。这种迭代形式也可以从另一个途径简单的推导出来。

按照(5—35)式, 把 $\hat{\mathbf{C}}$ 换成 \mathbf{X}_n , 则有

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n - I)$$

按照(5—37)式, 用 \mathbf{X}_{n+1} 表示 \mathbf{C} , \mathbf{X}_n 表示 $\hat{\mathbf{C}}$ 则有

$$\mathbf{X}_{n+1}^T \mathbf{X}_n = I + \mathbf{S} + \mathbf{V}$$

式中 \mathbf{V} ——为漂移误差阵,

在不考虑漂移误差的情况下则为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{n+1}^T \mathbf{X}_n &= I + \mathbf{S} \\ &= I + \frac{1}{2}(\mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n - I) \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{X}_{n+1}(I + \mathbf{S})$$

成

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n(I + \mathbf{S})^{-1}$$

由于 \mathbf{S} 是小量, 故 $(I + \mathbf{S})^{-1} \approx I - \mathbf{S}$

故有

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{n+1} &= \mathbf{X}_n \left[I - \frac{1}{2}(\mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n - I) \right] \\ &= \mathbf{X}_n \left[I - \frac{1}{2}\mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n + \frac{I}{2} \right] \\ &= \frac{3}{2}\mathbf{X}_n - \frac{1}{2}\mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n \end{aligned}$$

即(6—14)式。

方向余弦矩阵迭代正交化, 除了以上两种迭代公式外, I. Y. BAR-ITZHACK 还用梯度投影的方法[23]推导了另一种迭代形式。由于推导较繁, 我们就不介绍了, 下面给出结果

$$\begin{aligned} X_0 &= \hat{C} \\ X_{n+1} &= X_n - \frac{1}{2}(X_n X_n^T X_n - X_0) \end{aligned} \quad (6-15)$$

四、方向余弦矩阵最优正交化迭代算法的收敛问题。

任何迭代计算都必须是收敛的，经过若干次迭代后，收敛到所期望的值。如果迭代计算是发散的，则不能使用。一种好的迭代算法，不仅是收敛的，而且收敛速度要快，经过几次迭代就达到期望值。方向余弦矩阵正交化的迭代方程是矩阵方程，因此，直接研究它的收敛问题是比较困难的。为了便于分析，我们先把矩阵问题转化为标量问题。

由(6-5)式

$$A = RU \quad (6-15)$$

式中 $R = (AA^T)^{\frac{1}{2}}$ 是正定阵。

由于 R 是正定阵，故可以分解为

$$R = TAT^T \quad (6-16)$$

式中 T 为正交阵，其列矢量为 R 的特征矢量。

A 为 R 的特征值构成的对角线阵。

把(6-16)代入(6-5)式得

$$A = TAT^T U$$

A 可以是正交化迭代计算中的迭代值，即 X_n 或 X_{n+1} 都可以表示为

$$\left. \begin{aligned} X_{n+1} &= T\Lambda_{n+1}T^T U \\ X_n &= T\Lambda_n T^T U \end{aligned} \right\} \quad (6-17)$$

利用(6-17)式，可以把讨论 X_n 的收敛问题转化成讨论 Λ_n 的收敛问题。由于 Λ_n 是对角线阵，因此可以只讨论其中一个元素 $\Lambda_{n,i}$ 就可以了。这样就讨论矩阵迭代计算的收敛问题转化为讨论标量迭代计算的收敛了。下面我们就用这种方法分析三种矩阵正交化迭代算法的收敛问题。

第一种迭代算法

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}[(X_n^T)^{-1} + X_n] \quad (6-12)$$

把(6-17)式代入(6-12)式得

$$\begin{aligned} T\Lambda_{n+1}T^T U &= \frac{1}{2}[(T\Lambda_n T^T U)^T]^{-1} + \frac{1}{2}(T\Lambda_n T^T U) \\ &= \frac{1}{2}T\Lambda_n^{-1}T^T U + \frac{1}{2}T\Lambda_n T^T U \\ &= T \frac{1}{2}(\Lambda_n^{-1} + \Lambda_n)T^T U \end{aligned}$$

故有

$$\Lambda_{n+1} = \frac{1}{2}(\Lambda_n^{-1} + \Lambda_n) \quad (6-18)$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}_n = \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{U}$

按(6—17), (6—18)式有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{\Lambda}_n = \mathbf{\Lambda}_{n+1} = \mathbf{I}$$

即迭代次数为无穷大时, \mathbf{X}_n 收敛到正交阵, 此时, $\mathbf{\Lambda}_n$ 收敛到单位阵, 即矩阵的特征值收敛到 1。故 \mathbf{X}_n 收敛到正交阵的等效条件是其特征值收敛到 1。于是, 讨论(6—12)式的收敛问题就转化为讨论(6—18)式的任一元素的收敛问题, 即

$$\lambda_{i,n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_{i,n}} + \lambda_{i,n} \right) \quad (6-19)$$

(6—19)式的关系, 画成曲线如图(6—2)。图中曲线是按(6—19)式画出的 $\lambda_{i,n+1}$ 和 $\lambda_{i,n}$ 的关系曲线, 直线是 $\lambda_{i,n+1} = \lambda_{i,n}$ 的关系。从图 6—2 可以看出不管 $\lambda_{i,n}$ 的初值 是多大, 迭代计算都能使 $\lambda_{i,n}$ 很快收敛到 1, 即 \mathbf{X}_n 可以很快收敛到正交阵。

下面讨论收敛速度, 如果定义

$$\epsilon_{i,n} \triangleq \lambda_{i,n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{i,n}$$

则 $\epsilon_{i,n} = \lambda_{i,n} - 1$ (6—20)

(6—20)式为 n 次迭代后的误差。

我们把(6—19)式改写成如下的形式

$$\lambda_{i,n+1} - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_{i,n}} + \lambda_{i,n} \right) - 1$$

则

$$\begin{aligned} \lambda_{i,n+1} - 1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{i,n}^2 - 2\lambda_{i,n} + 1}{\lambda_{i,n}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\lambda_{i,n} - 1)^2 / \lambda_{i,n} \end{aligned}$$

即

$$\epsilon_{i,n+1} = \frac{1}{2} \epsilon_{i,n}^2 / \lambda_{i,n}$$

当 $\lambda_{i,n} \geq 1$ 时,

$$\epsilon_{i,n+1} \leq \frac{1}{2} \epsilon_{i,n}^2 \quad (6-21)$$

(6—21)式说明收敛是二次过程, 所以收敛速度是很快的, 通常迭代 2~3 次最多到 5 次就足够了。

第二种迭代算法

$$\mathbf{X}_{n+1} = \frac{3}{2} \mathbf{X}_n - \frac{1}{2} \mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n \quad (6-14)$$

类似上面的情况, 把(6—17)式代入到(6—14)式, 并取 $\mathbf{\Lambda}$ 的一个元素, 则有

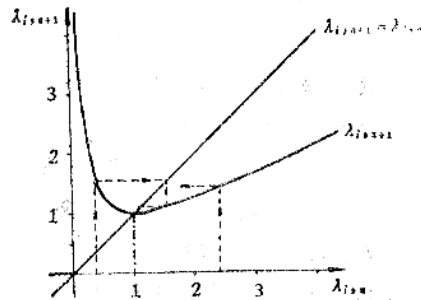


图6—2 第一迭代函数

$$\lambda_{i,n+1} = \frac{3}{2} \lambda_{i,n} - \frac{1}{2} \lambda_{i,n}^3 \quad (6-22)$$

把(6-22)式画成曲线，则如图(6-3)所示。从图6-3可以看出，只有当 $\lambda_{i,0} < \sqrt{3}$ 时， $\lambda_{i,n}$ 才收敛到+1。此时， \mathbf{X}_n 收敛到最接近 \mathbf{X}_0 的正交阵。当 $\lambda_{i,0}$ 大于 $\sqrt{3}$ 后，则会收敛到-1，或者发散。收敛到-1，意味着 \mathbf{X}_n 收敛到离 \mathbf{X}_0 最远的正交阵，而发散则意味着根本收敛不到正交阵。可见，这种迭代算法，只能在 $\lambda_{i,0} < \sqrt{3}$ 时才能使用。在实际问题中，矩阵的计算误差是不大的，也就是说 $\hat{\mathbf{C}}$ 偏离理想正交阵 \mathbf{C} 是不远的。因此， $\lambda_{i,0}$ 都接近1，满足 $\lambda_{i,0} < \sqrt{3}$ 条件。所以，这种迭代算法在实际应用中总是收敛的。

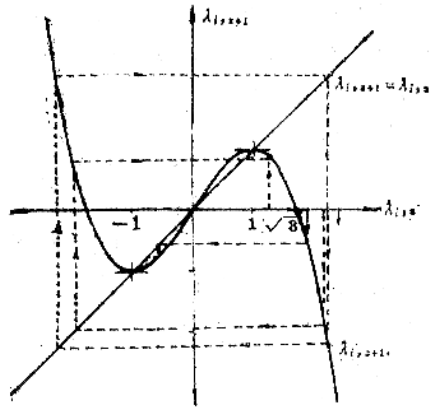


图6-3 第二种迭代函数

把(6-22)式改写成如下形式

$$\begin{aligned} 1 - \lambda_{i,n+1} &= 1 - \left(\frac{3}{2} \lambda_{i,n} - \frac{1}{2} \lambda_{i,n}^3 \right) \\ &= \frac{3}{2} (1 - \lambda_{i,n})^2 - \frac{1}{2} (1 - \lambda_{i,n})^3 \end{aligned}$$

定义

$$\epsilon_{i,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{i,n} - \lambda_{i,n} = 1 - \lambda_{i,n}$$

为 n 次迭代值的误差。代入上式得

$$\epsilon_{i,n+1} = \frac{3}{2} \epsilon_{i,n}^2 - \frac{1}{2} \epsilon_{i,n}^3 \quad (6-23)$$

显然，当 $0 < \lambda_{i,n} \leq 1$ 时

$$\epsilon_{i,n+1} \leq \frac{3}{2} \epsilon_{i,n}^2 \quad (6-24)$$

即这种迭代算法收敛也是二次过程。

第三种迭代算法

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \frac{1}{2} (\mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n - \mathbf{X}_0)$$

把(6-17)式代入，并取 Λ 的一个元素，得

$$\lambda_{i,n+1} = \frac{1}{2} \lambda_{i,0} + \lambda_{i,n} - \frac{1}{2} \lambda_{i,0} \lambda_{i,n}^2 \quad (6-25)$$

按照(6-25)式，不同的 $\lambda_{i,0}$ ，则有不同收敛曲线。我们分别取 $\lambda_{i,0} = 1.5 < 2$ ， $\lambda_{i,0} = 3 > 2$ ， $\lambda_{i,0} = 2$ ，可以画出三条收敛曲线见图(6-4)，如果 $\lambda_{i,0} < 2$ ，处在“a”点，则过程收敛。如果 $\lambda_{i,0} > 2$ ，即处在“b”点，则过程发散。如果 $\lambda_{i,0} = 2$ ，则一次迭代之后，过程就收敛到-1，但是，这个点是个不稳定点，由于计算噪声，总是移动到 $\lambda_{i,0} < 2$ ，或 $\lambda_{i,0} > 2$ 两个范围，即可能

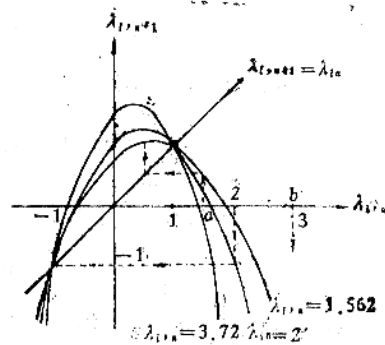


图6-4 第三种迭代函数

变成稳定的也可能变成发散的。所以，迭代过程只能工作在 $\lambda_{1,0} < 2$ 的条件下。

五、矩阵正交化的评价

实际使用的矩阵正交化处理方法是级数法和迭代法，方法本身是近似的，而且处理过程中还存在着计算误差。因此，正交化后的矩阵并不真正是正交阵，仍然存在着一一定的误差，而且，相对原矩阵仍有一定的距离。为此，我们可以用以下两个函数评价正交化后的矩阵的优劣。

1. 误差函数

$$e_n = \|E\|^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 e_{i,j}^2; \quad (6-26)$$

$$E_n = X_n^T X_n - I$$

误差函数定义为正交化后的矩阵偏离正交阵的误差范数。显然，如果正交化后的矩阵已经是一个正交阵了，则 $e_n = 0$ 。

2. 测距函数：

最优正交化就是正交化以后的矩阵最接近原矩阵。测距函数则用来评价其接近的程度。

定义

$$d = \|C_n - \hat{C}\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (C_{ni} - \hat{C}_{i,j})^2 \quad (6-27)$$

如果采用迭代法进行正交化，显然，当迭代次数为无穷大时，即 $n = \infty$ 有

$$e_n = 0$$

$$d_n = d_{min}$$

下面举几个数字计算的例子，如果采用第三种迭代法，即

$$X_0 = \hat{C}$$

$$X_{n+1} = X_n - 0.5(X_n \hat{C}^T X_n - \hat{C})$$

$$\text{例1 } X_0 = \hat{C} = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.45 & -0.88 \\ -0.96 & 0.26 & 0.01 \\ 0.29 & 0.87 & 0.38 \end{bmatrix}$$

$$e_0 = 2.207768 \times 10^{-2}$$

$$d_0 = 0$$

五次迭代计算之后有

$$X_5 = \begin{bmatrix} 0.10552840 & 0.41307130 & -0.90456390 \\ -0.95870040 & 0.28386160 & 0.01778197 \\ 0.26411620 & 0.86532920 & 0.42596700 \end{bmatrix}$$

$$e_5 = 3.197442 \times 10^{-4}$$

$$d_5 = 5.612920 \times 10^{-2}$$

$$\text{例2 } X_0 = \hat{C} = \begin{bmatrix} 0.77 & -0.35 & 0.48 \\ 0.07 & 0.87 & 0.47 \\ -0.60 & -0.50 & 0.61 \end{bmatrix}$$

$$e_0 = 7.73028 \times 10^{-2}$$

$$d_0 = 0$$

$$X_6 = \begin{bmatrix} 0.79356890 & -0.34802850 & 0.49912380 \\ 0.02168035 & 0.83593070 & 0.54840640 \\ -0.60809390 & -0.42437750 & 0.67091370 \end{bmatrix}$$

$$e_6 = 5.471179 \times 10^{-13}$$

$$d_6 = 2.006292 \times 10^{-2}$$

$$\text{例3 } X_0 = \hat{C} = \begin{bmatrix} 0.38 & 0.91 & -0.08 \\ -0.38 & 0.24 & 0.88 \\ 0.84 & -0.29 & 0.43 \end{bmatrix}$$

$$X_7 = \begin{bmatrix} 0.37577320 & 0.92259520 & -0.08725035 \\ -0.38076380 & 0.23954660 & 0.89310490 \\ 0.84487470 & -0.30238310 & 0.44130600 \end{bmatrix}$$

$$e_7 = 2.486899 \times 10^{-14}$$

$$d_7 = 7.065339 \times 10^{-4}$$

§ 6—2 变换四元数的规范化

和方向余弦矩阵的情况类似，由于计算方法上的截断误差和计算机的舍入误差，使计算的变换四元数的范数不再等于 1，即计算的变换四元数失去规范性，从而出现刻度误差，因此，必须对计算的变换四元数进行规范化处理，以便消除刻度误差。

我们用 \hat{Q} 表示计算的变换四元数， Q 表示规范化的变换四元数，即

$$\hat{Q} = \hat{q}_0 + \hat{q}_1 i + \hat{q}_2 j + \hat{q}_3 k$$

$$Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

用最小二乘判据，求最优规范化的变换四元数，表示

$$D^2 = \sum_{i=0}^3 (\hat{q}_i - q_i)^2$$

考虑约束条件

$$g = \sum_{i=0}^3 q_i^2 - 1 = 0 \quad (6-28)$$

用拉格朗日乘数法，求在约束条件下的极值。

$$\phi = D^2 + \lambda g$$

$$= \sum_{i=0}^3 (\hat{q}_i - q_i)^2 + \lambda \left(\sum_{i=0}^3 q_i^2 - 1 \right)$$

对上式求导，并令其等于零得

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_i} = -2(\hat{q}_i - q_i) + 2\lambda q_i = 0 \quad i=0, 1, 2, 3$$

故有

$$q_i = \frac{\hat{q}}{1+\lambda} \quad (6-29)$$

代入(6-28)式得

$$\frac{\sum_{i=0}^3 q_i^2}{(1+\lambda)^2} = 1$$

即

$$\frac{1}{1+\lambda} = \left(\sum_{i=0}^3 q_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

代回到(6-29)式得:

$$q_i = \frac{\hat{q}_i}{\left(\sum_{i=0}^3 q_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

即

$$q_i = \frac{\hat{q}_i}{\sqrt{\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2}} \quad (6-30)$$

(6-30)式即为变换四元数的最优规范化算式。显然,变换四元数的最优规范化要比方向余弦矩阵的最优正交化在计算上简单得多。这是用四元数法求变换矩阵的又一优点。

第七章 捷联式惯导系统的初始对准



捷联式惯导系统应用中的一个关键问题是，在外场条件下，满足环境条件与时间限制的初始对准，即系统必须在飞行器受阵风、登机、装载等各种干扰运动的影响下，在较短的时间内以一定的精度确定出从机体坐标系到导航坐标系的初始变换矩阵。

对准可以是自主的（即不依靠外部设备）或受控（即使捷联系统的输出与某些系统相一致），或这两种方法的结合。因为绝大部分实用的惯导系统都是选用与地球固联的参考坐标系，所以借惯性仪表测量两个在空间不共线的矢量：地球速率矢量 ω_{ie} 和地球重力矢量 g ，实现自主对准是很方便的。自对准包括水平对准和陀螺罗经对准。

飞机捷联惯导系统的自对准可分两步进行。在粗对准阶段，依靠重力矢量及地球速率矢量的测量值，直接估算从机体坐标系到导航参考坐标系的变换矩阵。在精对准阶段，可通过处理惯性仪表的输出信号，精校计算的参考系与真实参考系间的小失准角，建立准确的初始变换矩阵。

§ 7-1 粗对准原理

一、解析式粗对准

1. 对准方法的描述

取导航坐标系为地理坐标系（ n 系 NED 轴）。初始对准时，飞行器停放在地面上，加速度计测量的是重力加速度矢量在机体坐标系中的分量，陀螺仪测量的是地球速率矢量在机体坐标系 b 中的分量。这两个矢量在导航坐标系 n 中的分量是已知的，并且是常值。变换矩阵 C_b^n 可由 ω_{ie} 及 g 在 b 和 n 坐标系中的估值计算出来。重力矢量和地球速率矢量的变换式为

$$g^b = C_b^n g^n \quad (7-1)$$

$$\omega_{ie}^b = C_b^n \omega_{ie}^n \quad (7-2)$$

如定义

$$v = g \times \omega_{ie}$$

还可写出

$$v^b = C_b^n v^n \quad (7-3)$$

由于

$$C_b^n = (C_n^b)^{-1} = (C_n^b)^T$$

上述三个矢量关系可写成

$$C_b^n = \begin{bmatrix} (g^n)^T \\ (\omega_{ie}^n)^T \\ (v^n)^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (g^b)^T \\ (\omega_{ie}^b)^T \\ (v^b)^T \end{bmatrix} \quad (7-4)$$

由此, 如果上式中的逆矩阵存在, 对准矩阵 \mathbf{C}_c^b 便可唯一地决定下来。当矩阵中的任一行不是其余行的线性组合时, 其逆矩阵便存在。如两个矢量 ω_{ic} 和 \mathbf{g} 不共线, 这个条件总能满足。这表明, 解析对准法不能用于地球的极区。对于一般情况, 方程式 (7-4) 中的逆阵由下式确定

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (\mathbf{g}^n)^T \\ (\omega_{ic}^n)^T \\ (\mathbf{v}^n)^T \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & g \\ \omega_{ic} \cos \varphi & 0 & -\omega_{ic} \sin \varphi \\ 0 & g \omega_{ic} \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{g} \tan \varphi & \frac{1}{\omega_{ic}} \sec \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g \omega_{ic}} \sec \varphi \\ \frac{1}{g} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7-5)$$

在静基座上对准时, 解析对准法比现有的光学对准法要好。然而实际情况下, 由于受于 扰角振动及干扰加速度的影响, 其性能将要下降。这种影响是双重的, 首先, 这些干扰使 \mathbf{g}^b 与 ω_{ic}^b 的测量有误差, 因为被测量的量是

$$\mathbf{f} = -\mathbf{g} + \mathbf{f}_d \quad (7-6)$$

$$\omega_{ib} = \omega_{ic} + \omega_d \quad (7-7)$$

下标 d 表示干扰量; 其次, \mathbf{g}^b 和 ω_{ic}^b 在某种程度上变成了时间的函数。这可以从下列表达式看出, 因为 $\omega_{ic}^n = 0$,

$$\begin{aligned} \omega_{ic}^b &= \mathbf{C}_n^b \omega_{ic}^n \\ \dot{\omega}_{ic}^b &= \mathbf{C}_n^b \dot{\omega}_{ic}^n + \dot{\mathbf{C}}_n^b \omega_{ic}^n \\ &= \omega_{ib}^{bK} \mathbf{C}_n^b \omega_{ic}^n = -\omega_{ib}^{bK} \omega_{ic}^b \end{aligned} \quad (7-8)$$

式中反对称矩阵 ω_{ib}^{bK} 的元素由 ω_d 的分量确定。由此需要引入某种滤波作用, 以减小这些振动的影晌。可以采用简单的低通滤波器, 以得到被测量的平均值。这样便能给出平均对准矩阵。显然, 与飞机的运动有关, 机体坐标系的瞬时位置相对于其平均位置可能有相当大的变化。其结果是, 如果仅达到平均对准的话, 则当系统转入导航状态时, 会有比较大的初始失准角。若能得到飞机振动的统计特性, 则可构造一个更完善的最佳滤波方案, 然而, 要想依靠线性滤波把 ω_{ic}^b 和 \mathbf{g}^b 的变动从干扰 ω_d 及 \mathbf{f}_d 中区分开来是相当困难的。因为很可能这些分量包含有相同的频率。此外, 滤波器还会引入附加的时间延迟。因此, 解析对准主要是作为一种平均对准, 它是迅速求得变换矩阵初始估值 $\mathbf{C}_b^{n'}$ 的一种方法。坐标系 n' 可称为捷联平台坐标系, 它与真实参考系 n 之间的关系可用三个小失准角描述。变换矩阵 $\mathbf{C}_b^{n'}$ 为

$$\mathbf{C}_b^{n'} = \mathbf{I} - \mathbf{E}^n = \begin{pmatrix} 1 & \phi_d & -\phi_e \\ -\phi_d & 1 & \phi_n \\ \phi_e & -\phi_n & 1 \end{pmatrix} \quad (7-9)$$

在精对准阶段, 将利用计算参考系 n' 与真实参考系 n 间的失准角估值 $\hat{\phi}$, 精校变换矩阵的元素。

2. 误差分析

当计及仪表误差和基座运动时, 尚不容易找出一种对上述粗对准方案进行误差分析的解析表达式。下面讨论的目的在于导出一个可以在数字计算机上求解的误差方程式。矩阵 \mathbf{C}_b^a 的方程式 (7-4) 可写作

$$\mathbf{C}_b^a = \mathbf{M} \mathbf{Q}_T \quad (7-10)$$

式中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^n)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{i,0}^n)^T \\ (\mathbf{v}^n)^T \end{bmatrix}^{-1} \quad \mathbf{Q}_T = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^b)^T \\ (\boldsymbol{\omega}_{i,0}^b)^T \\ (\mathbf{v}^b)^T \end{bmatrix}$$

在对准中 \mathbf{M} 的元素是常值, 而 \mathbf{Q}_T 包含有测量误差及仪表误差。由此可写出

$$\mathbf{C}_b^a' = \mathbf{M}(\mathbf{Q}_T + \delta \mathbf{Q}_T) \quad (7-11)$$

式中 $\delta \mathbf{Q}_T$ 为 3×3 误差矩阵,

$$\delta \mathbf{Q}_T = \begin{bmatrix} -\delta f^T \\ \delta \boldsymbol{\omega}^T \\ \delta \mathbf{v}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta f_x & -\delta f_y & \delta f_z \\ \delta \omega_x & \delta \omega_y & \delta \omega_z \\ \delta v_x & \delta v_y & \delta v_z \end{bmatrix} \quad (7-12)$$

此处

$$\left. \begin{aligned} \delta v_x &= g_y \delta \omega_z - \omega_z \delta f_y - g_z \delta \omega_y + \omega_y \delta f_z \\ \delta v_y &= g_z \delta \omega_x - \omega_x \delta f_z - g_x \delta \omega_z + \omega_z \delta f_x \\ \delta v_z &= g_x \delta \omega_y - \omega_y \delta f_x - g_y \delta \omega_x + \omega_x \delta f_y \end{aligned} \right\} \quad (7-13)$$

$$[f_x, f_y, f_z]^T = -[g_x, g_y, g_z]^T$$

由此, 计算的变换矩阵 \mathbf{C}_b^a' 可改写成

$$\mathbf{C}_b^a' = \mathbf{M} \mathbf{Q}_T + \mathbf{M} \delta \mathbf{Q}_T = (\mathbf{I} + \mathbf{M} \delta \mathbf{Q}_T \mathbf{C}_b^a) \mathbf{C}_b^a \quad (7-14)$$

显然, 当 \mathbf{C}_b^a' 为正交矩阵时, $\mathbf{M} \delta \mathbf{Q}_T \mathbf{C}_b^a$ 必然是反对称矩阵

$$\mathbf{M} \delta \mathbf{Q}_T \mathbf{C}_b^a = \begin{bmatrix} 0 & \phi_d & -\phi_e \\ -\phi_a & 0 & \phi_n \\ \phi_c & -\phi_n & 0 \end{bmatrix} = -E^n \quad (7-15)$$

实际上, 由于测量和计算误差, 使得 \mathbf{C}_b^a' 变成非正交矩阵。为了克服非正交误差, 需要把 \mathbf{C}_b^a' 按下式进行正交化

$$(\mathbf{C}_b^a')_0 = \mathbf{C}_b^a' [(\mathbf{C}_b^a')^T (\mathbf{C}_b^a')]^{-1/2} \quad (7-16)$$

式中 $(\mathbf{C}_b^a')_0$ 为最优正交化矩阵 (见第六章)。将 (7-14) 式代入 (7-16) 式得

$$(\mathbf{C}_b^a')_0 = (\mathbf{I} + \mathbf{M} \delta \mathbf{Q}_T \mathbf{C}_b^a) \mathbf{C}_b^a (\mathbf{I} + \delta \mathbf{Q}_T^T \mathbf{M}^T \mathbf{C}_b^a + \mathbf{C}_b^a \mathbf{M} \delta \mathbf{Q}_T)^{-1/2}$$

式中已略去误差的乘积项。若将平方根项展成级数可得

$$(\mathbf{C}_b^a')_0 = [\mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathbf{M} \delta \mathbf{Q}_T \mathbf{C}_b^a + \mathbf{C}_b^a \delta \mathbf{Q}_T^T \mathbf{M}^T)] \mathbf{C}_b^a \quad (7-17)$$

小括号内的项为一个矩阵和其转置矩阵的差值，是反对称矩阵。当机体坐标系 b 相对于地理坐标系 n 处于任意方位时，还不容易导出失准角 ϕ_n, ϕ_e, ϕ_d 与仪表误差的简单解析函数式。为了便于分析，我们考虑一种特殊情况，假设 b 系沿着 n 系对准，即 $C_b^n = I$ ，此时，

$$(C_b^n)'_0 = \left[I - \begin{bmatrix} 0 & -(\phi_d)_0 & (\phi_e)_0 \\ (\phi_d)_0 & 0 & -(\phi_n)_0 \\ -(\phi_e)_0 & (\phi_n)_0 & 0 \end{bmatrix} \right] C_b^n \quad (7-18)$$

$C_b^n = C_n^b C_b^n = (I - \phi) C_b^n$

式中 $(\phi_K)_0, K=N, E, D$ 是经过正交化校正后得到的捷联平台失准角。由于

$$M\delta Q_T = \begin{bmatrix} \frac{\delta\omega_x}{\omega_{ie}} \sec\varphi - \frac{\delta f_x}{g} \tan\varphi & \frac{\delta\omega_y}{\omega_{ie}} \sec\varphi - \frac{\delta f_y}{g} \tan\varphi & \frac{\delta\omega_z}{\omega_{ie}} \sec\varphi - \frac{\delta f_z}{g} \tan\varphi \\ \frac{\delta\omega_y}{\omega_{ie}} \sec\varphi + \frac{\delta f_y}{g} \tan\varphi & \frac{\delta\omega_x}{\omega_{ie}} \sec\varphi - \frac{\delta f_x}{g} & \frac{\delta f_z}{g} \tan\varphi & \frac{\delta f_y}{g} \\ -\frac{\delta f_x}{g} & -\frac{\delta f_y}{g} & -\frac{\delta f_z}{g} \end{bmatrix} \quad (7-19)$$

可以求出

$$\phi_n = (\phi_n)_0 = -\frac{\delta f_y}{g} \quad (7-20)$$

$$\phi_e = (\phi_e)_0 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\delta f_x}{g} + \frac{\delta f_z}{g} \tan\varphi - \frac{\delta\omega_z}{\omega_{ie}} \sec\varphi \right) \quad (7-21)$$

$$\phi_d = (\phi_d)_0 = -\frac{\delta f_y}{g} \tan\varphi + \frac{\delta\omega_y}{\omega_{ie}} \sec\varphi \quad (7-22)$$

这表明，东向比力的测量误差所引起的北向水平误差约为 $3.4'/10^{-3}g$ ，北向比力的测量误差造成的东向水平误差为 $-1.7'/10^{-3}g$ ，垂向比力测量误差引起的东向水平误差为 $1.7'\tan\varphi/10^{-3}g$ ，方位角速度测量误差产生的东向水平误差为 $-3.4'\sec\varphi/\text{meru}$ ，东向比力测量误差引起的方位误差是 $-3.4'\tan\varphi/10^{-3}g$ ，而东向角速度测量误差所造成的方位误差是 $3.4'\sec\varphi/\text{meru}$ 。应当指出， $\delta f_K, \delta\omega_K, K=x, y, z$ ，分别表示所有的比力和角速度测量误差，它们起因于仪表的不定性误差及仪表的非正交化效应。

二、一次修正粗对准

1. 对准方法的描述

假设飞行器的姿态及航向角已由其它飞行仪表以几度的精度近似测出。被测出的加速度分量 \hat{f}^b 可通过由仪表读数构成的姿态四元数 \hat{Q} 进行分解。由此得到计算的加速度分量为

$$\begin{aligned} \hat{f}^n &= \hat{Q} \cdot \hat{f}^b \cdot \hat{Q}^* \\ &= \hat{Q} \cdot Q^* \cdot f^n \cdot Q \cdot \hat{Q}^* + \hat{Q} \cdot \delta f^b \cdot \hat{Q}^* \\ &= \delta Q^* \cdot f^n \cdot \delta Q + \hat{Q} \cdot \delta f^b \cdot \hat{Q}^* \end{aligned} \quad (7-23)$$

暂时不考虑测量误差，即 $\delta f^b = 0$ ，在飞行器没有加速度的情况下，矢量 f^n 为

$$\mathbf{f}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (7-24)$$

由于

$$\delta\mathbf{Q}^* = 1 - \frac{1}{2}\phi^n$$

把 \mathbf{f}^n , $\delta\mathbf{Q}^*$ 的表达式代入 (7-23) 并展开得

$$\hat{\mathbf{f}}^n = \begin{bmatrix} \phi_e g \\ -\phi_n g \\ -g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_n \\ \hat{f}_e \\ \hat{f}_d \end{bmatrix} \quad (7-25)$$

类似地, 如将陀螺仪测出的角速率 $\hat{\omega}^b$ 通过四元数 $\hat{\mathbf{Q}}$ 进行分解, 可以写出

$$\hat{\omega}^n = \hat{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\omega}^b \cdot \hat{\mathbf{Q}} = \delta\mathbf{Q} \cdot \omega^n \cdot \delta\mathbf{Q}^* + \hat{\mathbf{Q}} \cdot \delta\omega^b \cdot \hat{\mathbf{Q}}^* \quad (7-26)$$

当没有测量误差和飞行器角速率时, 矢量 ω^n 为

$$\omega^n = \begin{bmatrix} \omega_{ie} \cos\varphi \\ 0 \\ -\omega_{ie} \sin\varphi \end{bmatrix} \quad (7-27)$$

将上式代入 (7-26) 并展开得

$$\hat{\omega}^n = \begin{bmatrix} \omega_{ie} \cos\varphi - \phi_e \omega_{ie} \sin\varphi \\ -\phi_d \omega_{ie} \cos\varphi - \phi_n \omega_{ie} \sin\varphi \\ -\omega_{ie} \sin\varphi + \phi_e \omega_{ie} \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_n \\ \omega_e \\ \omega_d \end{bmatrix} \quad (7-28)$$

由此

$$-\phi_d \omega_{ie} \cos\varphi = \hat{\omega}_e + \phi_n \omega_{ie} \sin\varphi \quad (7-29)$$

因为 g 与 ω_{ie} 的值可以准确求出, 确定对准地点纬度 φ 的误差一般约在几个角秒以内。按 (7-25) 及 (7-29) 式可以求出失准角

$$\phi_n = -\frac{\hat{f}_e}{g} \quad (7-30)$$

$$\phi_e = \frac{\hat{f}_n}{g} \quad (7-31)$$

$$\phi_d = -\frac{\hat{\omega}_e}{\omega_{ie} \cos\varphi} + \frac{\hat{f}_d}{g} \tan\varphi \quad (7-32)$$

利用这些估算的失准角可以校正计算的四元数。

$$\delta\mathbf{Q}^* = \left[1, \frac{1}{2}\hat{\phi}_n, \frac{1}{2}\hat{\phi}_e, \frac{1}{2}\hat{\phi}_d \right]^T$$

用 $\delta\mathbf{Q}^*$ 对 $\hat{\mathbf{Q}}$ 进行修正得正确的四元数

$$\mathbf{Q} = \delta\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{Q}} \quad (7-33)$$

2. 误差分析

现在考虑仪表误差及干扰运动对估值 $\hat{\phi}$ 的影响。用 \mathbf{f}_d 和 ω_d 分别表示干扰加速度及角速度矢量, (7-24) 和 (7-27) 式可改写成

$$\mathbf{f}^n = [f_{dn}, f_{dc}, -g + f_{dd}]^T \quad (7-34)$$

$$\boldsymbol{\omega}^n = [\omega_{dn} + \omega_{ie} \cos \varphi, \omega_{dc}, \omega_{dd} - \omega_{ie} \sin \varphi]^T \quad (7-35)$$

将(7-34), (7-35)分别代入(7-25)和(7-28)中, 并将仪表误差 δf^b 和 $\delta \boldsymbol{\omega}^b$ 沿计算参考坐标系轴分解得到

$$\hat{\mathbf{f}}'^n = \begin{bmatrix} g\phi_n + \delta f_n + f_{dd} \\ -g\phi_n + \delta f_c + f_{dc} \\ -g + \delta f_d + f_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_n \\ f'_c \\ f'_d \end{bmatrix} \quad (7-36)$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}'^n = \begin{bmatrix} \omega_{ie} \cos \varphi - \phi_n \omega_{ie} \sin \varphi + \delta \omega_n + \omega_{dn} \\ -\phi_n \omega_{ie} \sin \varphi - \phi_d \omega_{ie} \cos \varphi + \delta \omega_c + \omega_{dc} \\ -\omega_{ie} \sin \varphi + \phi_c \omega_{ie} \cos \varphi + \delta \omega_d + \omega_{dd} \end{bmatrix} \quad (7-37)$$

计及

$$\begin{aligned} \phi_n &= \frac{-\hat{f}'_n}{g} \\ \phi_c &= \frac{\hat{f}'_c}{g} \\ \phi_d &= -\frac{\hat{\omega}'_c}{\omega_{ie} \cos \varphi} + \frac{\hat{f}'_c}{g} \tan \varphi \end{aligned}$$

从(7-36)与(7-37)式可以求出估计的捷联平台失准角为

$$\left. \begin{aligned} \phi_n &= \phi_n - \frac{1}{g} (f_{dc} + \delta f_c) \\ \phi_c &= \phi_c + \frac{1}{g} (f_{dn} + \delta f_n) \\ \phi_d &= \phi_d + \frac{\tan \varphi}{g} (f_{dc} + \delta f_c) - \frac{\sec \varphi}{\omega_{ie}} (\omega_d + \delta \omega_c) \end{aligned} \right\} \quad (7-38)$$

当 $\delta f_n = \delta f_c = 10^{-4}g$ 时, 水平失准角误差为 10^{-4}rad 。由陀螺漂移所产生的方位失准角误差, 当 $\delta \omega_c = 0.2^\circ/\text{h}$, 纬度 $\varphi = 45^\circ$ 时, 约为 10^{-3}rad ; δf_c 所产生的方位误差比它小一个数量级, 即 10^{-4}rad 。干扰运动对一次修正对准精度的影响是比较大的。例如, $10^{-3}g$ 的横向加速度可能造成 0.5° 的水平误差, 而绕东向轴的 $10^{-3}^\circ/\text{sec}$ 的干扰角速率将产生约 20° 的方位误差。克服扰动影响最常用的方法是在一段时间内对估计的失准角取平均值

$$\left. \begin{aligned} \hat{\phi}'_c &= \frac{1}{T} \int_0^T -\frac{\hat{f}'_c}{g} dt \\ \hat{\phi}'_n &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\hat{f}'_n}{g} dt \\ \hat{\phi}'_d &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(-\frac{\hat{\omega}'_c}{\omega_{ie} \cos \varphi} + \frac{\hat{f}'_c}{g} \tan \varphi \right) dt \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

当 T 足够大时, 扰动运动对计算失准角的影响几乎可以忽略。但这时计算的只是平均失准角, 而实际的失准角误差最大可能是其波动的峰值。

§7-2 精对准原理

按照提取失准角信息的方法来划分，可能有两种自主式精对准方案。其一是从加速度表及东向陀螺仪输出中提取失准角信息，其二是与平台式惯导系统对准相似，只从水平加速度表输出中提取失准角信息。

一、东向陀螺作为敏感元件的校正对准

1. 对准方法的描述

取地理坐标系为参考系，校正对准方案的编排如图(7-1)所示。为了清晰，图中将四元数更新姿态矩阵算法简略了。校正对准的基本思路是，通过处理加速度计及陀螺仪的测量值，检测出 n 坐标系与 n' 坐标系之间的误差角 ϕ ，并产生一个修正指令 ω_{cmd} 给姿态变换矩阵计算机，以驱动这些误差角尽可能减小为零。与此同时，还需要对干扰角振动

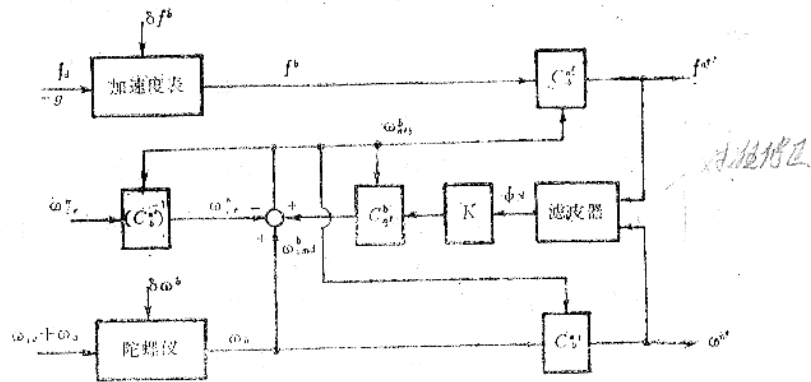


图7-1 校正对准的原理图

进行补偿。这个过程类似于平台系统中“基座振动的隔离”。由图中看出，它是依靠将干扰角速度 ω_d^b 的估值值给方向余弦矩阵计算机来实现的。变换矩阵 $C_{n'}^b$ 利用下式进行更新

$$\dot{C}_{n'}^b = C_{n'}^b \omega_{n'}^{b'k} \quad (7-40)$$

式中 $\omega_{n'}^{b'k}$ 是角速度 $\omega_{n'}^{b'}$ 的反对称矩阵。理想情况下，用来更新变换矩阵的角速度为

$$\omega_{n'}^{b'k} = \omega_{n'}^{b'n} + \omega_{n'}^{b'd} = \omega_{cmd}^b + \omega_d^b \quad (7-41)$$

式中 ω_{cmd}^b 是通过滤波，计算得到的与误差角有关的修正信号， ω_d^b 为补偿计算机体坐标系 b' 的振动所需的角速度。在图 7-1 中，借从陀螺测出的整个角速度中 $(\omega_n^b + \omega_d^b + \delta\omega^b)$ 减去 ω_n^b 以求得 ω_d^b 的估值，但因为 ω_n^b 并不等于 ω_n^b 。此外，陀螺输出中还包含有漂移率 $\delta\omega^b$ ，所以实际上用来更新变换矩阵 $C_{n'}^b$ 的角速度 $\omega_{n'}^{b'k}$ 由下式给出

$$\begin{aligned} \omega_{n'}^{b'k} &= \omega_{cmd}^b + \omega_d^b + \delta\omega^b + \omega_n^b - \omega_n^b \\ &= \omega_{cmd}^b + \omega_d^b + \delta\omega^b - E^b \omega_{n'}^b \end{aligned} \quad (7-42)$$

式中 E^b 是 b 系与 b' 系间失准角的反对称矩阵

$$C_{n'}^b = I + E^b \quad (7-43)$$

将 (7-42) 式的反对称形式代入 (7-40)，得到

$$\dot{C}_{n'}^b = C_{n'}^b \omega_{cmd}^b + C_{n'}^b \omega_d^b + C_{n'}^b \delta\omega^b - C_{n'}^b \delta\omega_{n'}^b \quad (7-44)$$

式中 $\delta\omega_{ie}^{bk}$ 是 $E^b\omega_{ie}^b$ 的反对称形式。考虑到

$$C_b^{n'} = C_a^{n'} C_b^n \quad (7-45)$$

$$\dot{C}_b^{n'} = C_a^n \dot{C}'_b^n + \dot{C}_a^{n'} C_b^n \quad (7-46)$$

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \omega_{ie}^{bk} \quad (7-47)$$

(7-44) 式变为

$$\begin{aligned} \dot{C}_a^{n'} C_b^n &= C_b^{n'} \omega_{emd}^{bk} + C_b^{n'} \omega_d^{bk} - C_b^{n'} \delta\omega_{ie}^{bk} + C_b^{n'} \delta\omega^{bk} - C_a^{n'} C_b^n \omega_d^{bk} \\ &= C_b^{n'} \omega_{emd}^{bk} - C_b^{n'} \delta\omega_{ie}^{bk} + C_b^{n'} \delta\omega^{bk} \end{aligned} \quad (7-48)$$

利用 (7-9) 式及

$$\dot{C}_a^{n'} = -\dot{E}^n \quad (7-49)$$

在忽略高阶微量后, 由 (7-48) 式得到

$$\dot{E}^n = -C_b^{n'} \omega_{emd}^{bk} C_b^n - C_b^{n'} \delta\omega^{bk} C_b^n + C_b^{n'} \delta\omega_{ie}^{bk} C_b^n$$

或

$$\dot{E}^n = -\omega_{emd}^{nk} - \delta\omega^{nk} + \delta\omega_{ie}^{nk} \quad (7-50)$$

上式可写成矢量形式

$$\dot{\phi}^n = -\omega_{emd}^n - \delta\omega^n - \omega_{ie}^{nk} \phi^n \quad (7-51)$$

为使 ϕ^n 减小至零, 修正指令 ω_{emd}^n 可选择成 ϕ^n 估值的线性函数, 即采用线性控制律,

$$\omega_{emd}^n = K_c \hat{\phi}^n \quad (7-52)$$

式中 K_c 为待定的 3×3 修正矩阵。由此, (7-51) 式变成

$$\dot{\phi}^n + \omega_{ie}^{nk} \phi^n + K_c \hat{\phi}^n = -\delta\omega^n \quad (7-53)$$

可以看出, 上式表示三个标量微分方程式, 它通过地球速率项 $\omega_{ie}^{nk} \phi^n$ 相耦合。

2. 失准角信息的提取

为了构成修正指令 ω_{emd}^n , 必须测出误差角矢量 ϕ^n 。从计算的 g 的水平分量及 ω_{ie} 的东向分量可以求得 ϕ^n 的三个分量。具体地讲, 由于

$$\hat{f}^n = (I - E^n) C_b^n \hat{f}^b \quad (7-54)$$

$$= (I - E^n) (-g^n + f_d^n + \delta f^n)$$

$$g^n = [0, 0, g]^T$$

得到

$$\hat{f}_N = g\phi_E + f_{dN} + \delta f_N \quad (7-55)$$

$$\hat{f}_E = -g\phi_N + f_{dE} + \delta f_E \quad (7-56)$$

方位误差角 ϕ_D 可由下式找出

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^n &= (I - E^n) C_b^n (\omega_{ie}^b + \omega_d^b + \delta\omega^b) \\ &= (I - E^n) \omega_{ie}^n + \omega_d^n + \delta\omega^n \end{aligned} \quad (7-57)$$

其东向分量为

$$\omega_e = -\omega_{ie} \cos\varphi (\phi_d + \phi_n \tan\varphi) + \omega_{de} + \delta\omega_e \quad (7-58)$$

系统设计成, 可从 \hat{f}_n 、 \hat{f}_e 及 ω_e 的测量值中提取误差角, 假定不计误差源的影响,

$$\hat{\phi}^n = \left[\frac{\hat{f}_e}{g}, \frac{\hat{f}_n}{g}, \tan\varphi \frac{\hat{f}_e}{g} - \sec\varphi \frac{\hat{\omega}_e}{\omega_{ie}} \right]^T \quad (7-59)$$

将 $\hat{\phi} = \phi + \delta\phi$ 和 (7-55), (7-56) 及 (7-58) 代入 (7-59), 可求得估值误差 $\delta\phi$ 为

$$\hat{\phi}^n = \phi^n + \delta\phi^n = \phi^n + \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{g}(f_{de} + \delta f_e) \\ \frac{1}{g}(f_{dn} + \delta f_n) \\ \frac{\tan\varphi}{g}(f_{de} + \delta f_e) - \frac{\sec\varphi}{\omega_{ie}}(\omega_{de} + \delta\omega_e) \end{array} \right\} \quad (7-60)$$

3. 修正矩阵的结构及对准精度分析

现在先确定使误差角趋近于零的 K_c 矩阵的结构, 然后简要分析对准精度。在 (7-53) 式中, 假设没有不定性误差, 得到

$$\dot{\phi}^n = -\omega_{ie}^n \phi^n - K_c \hat{\phi}^n \quad (7-61)$$

它可改写成下列通用形式

$$\dot{X} = AX + U \quad (7-62)$$

式中

$$X = \phi^n, \quad A = -\omega_{ie}^n, \quad U = -K_c \hat{\phi}^n$$

确定 K_c 的一种方法是定义下列形式的评价函数

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (X^T V X + U^T W U) dt \quad (7-63)$$

式中 t_0 是过程的起始时间, V 和 W 是正定加权矩阵, 这里取它们为常数阵。 V 和 W 的合理选择是使闭环系统有满意的动态品质。文献 [24] 指出, V 和 W 取下列对角线阵是合适的

$$V = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{x_{1m}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{2m}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_{3m}^2} \end{array} \right\} \quad (7-64)$$

$$W = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{u_{1m}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u_{2m}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{u_{3m}^2} \end{array} \right\} \quad (7-65)$$

式中 x_{im} 及 u_{im} 是状态与控制量的上限值。为使性能指标 J 取极小值, K_c 应为

$$K_c = W^{-1} S \quad (7-66)$$

式中 S 是代数里卡提方程式的解

$$SA + A^T S - SW^{-1}S + V = 0 \quad (7-67)$$

此处

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{ie} \sin \varphi & 0 \\ \omega_{ie} \sin \varphi & 0 & \omega_{ie} \cos \varphi \\ 0 & -\omega_{ie} \cos \varphi & 0 \end{bmatrix}$$

方程式 (7-67) 須用数值法求解。

确定矩阵 \mathbf{K}_c 的另一种方法是使方程式 (7-53) 变成无耦合的。这一点能够做到，因为在给定的纬度上 ω_{ie} 是常数。由此可取 \mathbf{K}_c 的非对角线项等于反对称矩阵 $-\omega_{ie} \mathbf{I}_2$ 的对应元素，即使

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} K_n & -\omega_{ie} \sin \varphi & 0 \\ \omega_{ie} \sin \varphi & K_e & \omega_{ie} \cos \varphi \\ 0 & -\omega_{ie} \cos \varphi & K_d \end{bmatrix} \quad (7-68)$$

这样，方程式 (7-53) 变成

$$\dot{\phi}^n + \mathbf{K}_d \phi^n + \mathbf{K}_c \delta \phi^n = -\delta \omega^n \quad (7-69)$$

式中

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} K_n & 0 & 0 \\ 0 & K_e & 0 \\ 0 & 0 & K_d \end{bmatrix}$$

若详细考察 (7-69) 式中的项 $\mathbf{K}_c \delta \phi^n$ ，可以看到，合理选择系统的调整时间，则有

$$K_n, K_e, K_d \gg \omega_{ie}$$

由此，方程式 (7-69) 可改写成

$$\dot{\phi}^n + \mathbf{K}_d \phi^n = -\delta \omega^n - \mathbf{K}_d \delta \phi^n \quad (7-70)$$

(7-70) 是一阶非耦合误差角矢量微分方程式。为便于分析各误差源的影响，将它改写成分量形式，取 $p = d/dt$ ，

$$\left. \begin{aligned} (p + K_n) \phi_n &= -\frac{K_n}{g} (f_{de} + \delta f_e) - \delta \omega_n \\ (p + K_e) \phi_e &= -\frac{K_e}{g} (f_{dn} + \delta f_n) - \delta \omega_e \\ (p + K_d) \phi_d &= K_d \left[\frac{\sec \varphi}{\omega_{ie}} (\omega_{de} + \delta \omega_E) - \frac{\tan \varphi}{g} (f_{de} + \delta f_e) \right] - \delta \omega_d \end{aligned} \right\} \quad (7-71)$$

显然，捷联系统的这种对准方案与平台系统中的陀螺罗经对准有相似之处，在高纬度地区精度下降，而在地球的两极则不能工作。可以看出，失准角 ϕ_n 、 ϕ_e 、 ϕ_d 是载体运动和仪表测量误差的函数。利用拉普拉斯变换可容易求出方程式的解。假定扰动函数是时间的一般函数得到

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_n(S) &= \frac{K_n}{g} \frac{f_{dn}(S) + \delta f_n(S)}{S + K_n} - \frac{\delta \omega_n(S)}{S + K_n} + \frac{\phi_n(0)}{S + K_n} \\
 \phi_e(S) &= -\frac{K_e}{g} \frac{f_{dn}(S) + \delta f_n(S)}{S + K_e} - \frac{\delta \omega_e(S)}{S + K_e} + \frac{\phi_e(0)}{S + K_e} \\
 \phi_d(S) &= \frac{K_d}{\omega_{ie}} \sec \varphi \frac{\omega_{de}(S) + \delta \omega_e(S)}{S + K_d} - K_d \frac{\tan \varphi}{g} \frac{f_{de}(S) + \delta f_e(S)}{S + K_d} \\
 &\quad - \frac{\delta \omega_d(S)}{S + K_d} + \frac{\delta \omega_d(0)}{S + K_d}
 \end{aligned} \right\} \quad (7-72)$$

式中 S 为拉普拉斯算子。利用卷积定理

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{S+K} \omega(S) = \int_0^t e^{-K(t-\tau)} \omega(\tau) d\tau$$

对于任意的输入，方程式 (7-72) 的解由下式给出

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_n(t) &= e^{-K_n t} \int_0^t e^{K_n \tau} \left[\frac{K_n}{g} f_{de}(\tau) + \frac{K_n}{g} \delta f_e(\tau) - \delta \omega_n(\tau) \right] d\tau + \phi_n(0) e^{-K_n t} \\
 \phi_e(t) &= e^{-K_e t} \int_0^t e^{K_e \tau} \left[-\frac{K_e}{g} f_{dn}(\tau) - \frac{K_e}{g} \delta f_n(\tau) - \delta \omega_e(\tau) \right] d\tau + \phi_e(0) e^{-K_e t} \\
 \phi_d(t) &= e^{-K_d t} \int_0^t e^{K_d \tau} \left\{ \frac{K_d}{\omega_{ie}} \sec \varphi \left[\omega_{de}(\tau) + \delta \omega_e(\tau) \right] \right. \\
 &\quad \left. - K_d \frac{\tan \varphi}{g} \left[f_{de}(\tau) + \delta f_e(\tau) \right] - \delta \omega_d(\tau) \right\} d\tau + \phi_d(0) e^{-K_d t}
 \end{aligned} \right\} \quad (7-73)$$

由于载体运动没有确定，最好采用统计方法讨论方程式 (7-73)。将 (7-73) 式平方，并取这个结果的数学期望，可求得均方值。若独立变量的统计特性互不相关，即若各随机过程是独立的，且只有一个是具有偏置的，则当取数学期望时，将没有交叉耦合项。

下面我们针对载体运动为零，加速度表陀螺仪有常值误差的简单情况，来分析系统的动力学特性

$$\begin{aligned}
 f_{de}(t) &= f_{dn}(t) = \omega_{de}(t) = 0 \\
 \delta f_K(t) &= \delta f_n = \text{常值}, \quad K = N, E \\
 \delta \omega_K(t) &= \delta \omega_n = \text{常值}, \quad K = N, E, D
 \end{aligned}$$

此时 (7-73) 式变为

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_n &= \left(\frac{\delta f_e}{g} - \frac{\delta \omega_n}{K_n} \right) (1 - e^{-K_n t}) + \phi_n(0) e^{-K_n t} \\
 \phi_e &= -\left(\frac{\delta f_n}{g} + \frac{\delta \omega_e}{K_e} \right) (1 - e^{-K_e t}) + \phi_e(0) e^{-K_e t} \\
 \phi_d &= \left(\frac{\sec \varphi}{\omega_{ie}} \delta \omega_e - \tan \varphi \frac{\delta f_e}{g} - \frac{\delta \omega_d}{K_d} \right) (1 - e^{-K_d t}) + \phi_d(0) e^{-K_d t}
 \end{aligned} \right\} \quad (7-74)$$

由此得出稳态误差

$$\left. \begin{aligned} \phi_{nss} &= \frac{\delta f_e}{g} \frac{\delta \omega_n}{K_n} \\ \phi_{ess} &= -\frac{\delta f_n}{g} \frac{\delta \omega_e}{K_e} \\ \phi_{dss} &= \frac{\sec \varphi}{\omega_{ie}} \delta \omega_c - \tan \varphi \frac{\delta f_e}{g} \frac{\delta \omega_d}{K_d} \end{aligned} \right\} (7-75)$$

可以看出，与平台系统相比，主要误差源与灵敏度均相同。即造成水平误差的基本原因是加速度表的测量误差，而方位误差主要是由东向陀螺漂移引起的。

一、常规校正对准

在载体有扰动运动时，只用加速度表作为敏感元件的常规对准法已得到满意的对准效果。虽然采用卡尔曼滤波器改进常规对准也是一种有效的方法，但为使系统结构简单和适应噪声特性变动更便于调节滤波参数，我们提出有低通滤波器的常规对准方案。

1. 对准方法的描述

常规精对准系统的原理图如图(7-2)所示。粗对准后，计算地理坐标系 n' 与真实地理坐标 n 系之间有很小的失准角 ϕ 。造成对准误差的主要原因是飞行器的扰动运动。对加速度计

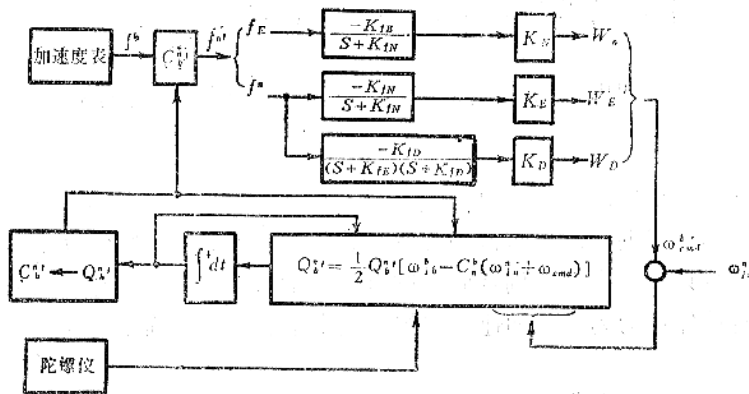


图7-2 常规校正对准原理图

输出信号进行滤波处理，可以求得失准角的估值 $\hat{\phi}$ ，然后用这个估值经过加权形成指令信号，对 C_n^b 进行连续校正，使 $\hat{\phi}$ 减小至零。应当指出，与东向陀螺校正对准方案相似，在四元数姿态校正计算中也应对干扰角振动进行补偿。由(7-51)式可写出失准角微分方程式的分量形式

$$\dot{\phi}_n = -\omega_{ie} \sin \varphi \phi_e + W_n - \delta \omega_n \quad (7-76)$$

$$\dot{\phi}_e = \omega_{ie} \sin \varphi \phi_n + \omega_{ie} \cos \varphi \phi_d + W_e - \delta \omega_e \quad (7-77)$$

$$\dot{\phi}_d = -\omega_{ie} \cos \varphi \phi_e + W_d - \delta \omega_d \quad (7-78)$$

式中 W_n, W_e, W_d 为指令信号。精对准分两步进行，将方位失准角 ϕ_d 保持在不加指令信

号的状态，系统先进行调平，把 ϕ_n, ϕ_e 驱动至零，然后再进行方位对准，把 ϕ_d 调整至零。

对上述方程式可作下列简化。在调平时，依靠忽略包含 $\omega_{ie}\sin\varphi$ 的项能使方程式 (7-76) 与 (7-77) 解耦。这样做是合理的，因为可以看出，经过粗对准后，当 $\phi_n = \phi_e = 1^\circ, \varphi = 45^\circ$ 时， $\omega_{ie}\sin\varphi\phi_n$ 及 $\omega_{ie}\sin\varphi\phi_e$ 项的值仅约为 $0.185^\circ/h$ 。它远小于要求的初始调平指令信号。自然， $\omega_{ie}\sin\varphi\phi$ 及 $\omega_{ie}\sin\varphi\phi_e$ 将比指令信号 W_n, W_e 更快地趋近于零。应当指出，在 (7-77) 式中，相对于 W_e 不能忽略 $\omega_{ie}\cos\phi_d$ ，因为调平时 ϕ_d 并未趋近于零， $\omega_{ie}\cos\phi_d$ 还比较大。对于方位对准，在 (7-78) 式中，与 W_d 相比可以忽略， $\omega_{ie}\cos\phi_e$ ，其理由与在 (7-76) 及 (7-77) 式中忽略包含 $\omega_{ie}\sin\varphi$ 的项相同。利用这些简化关系，(7-76) (7-78) 可改写为

$$\dot{\phi}_n = W_n - \delta\omega_n \tag{7-79}$$

$$\dot{\phi}_e = \omega_{ie}\cos\varphi_d\phi_d + W_e - \delta\omega_e \tag{7-80}$$

$$\dot{\phi}_d = W_d - \delta\omega_d \tag{7-81}$$

如果把 (7-55) 及 (7-56) 式所表示的加速度计输出，经过一阶数字滤波和加权后构成对准指令信号，便可以画出下列水平对准回路和方位对准回路的原理方块图。

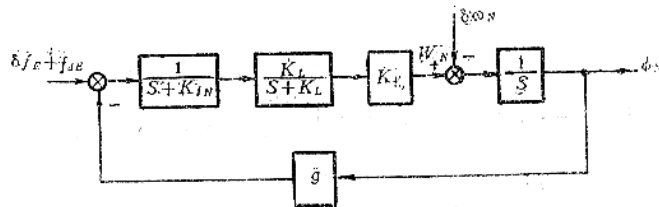


图7-3 北向调平回路

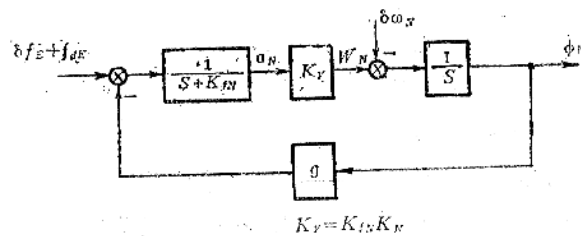


图7-4 东向调平回路

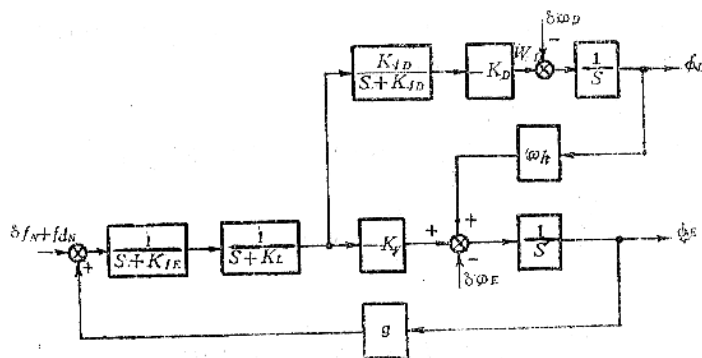


图7-5 方位对准回路

图中 K_{f_n} , K_{f_e} , K_{f_d} 为滤波器的参数, K_n , K_e , K_d 为加权系数。取 a_n , a_e , a_d 分别表示滤波器的输出, 滤波器方程可写为

$$\left. \begin{aligned} \dot{a}_n &= -K_{f_n} a_n + K_{f_n} (\delta f_e + f_{de} - g \phi_n) \\ \dot{a}_e &= -K_{f_e} a_e + K_{f_e} (\delta f_n + f_{de} + g \phi_e) \\ \dot{a}_d &= -K_{f_d} a_d + K_{f_d} a_e \end{aligned} \right\} \quad (7-82)$$

不难看出, 所述捷联式惯导系统的精对准原理与平台式惯导系统的对准类似, 可以借用平台惯导对准的一些概念来分析捷联惯导对准回路的设计问题。

2. 调平回路的设计

由于北向调平回路与东向调平回路的结构完全相同, 在分析水平对准回路设计原理时, 可以北向调平回路为对象进行研究。

按图 7-3 写出北向调平回路的微分方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_n \\ \dot{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_n \\ -K_{f_n} g & -K_{f_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_n \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta \omega_n \\ K_{f_n} (\delta f_e + f_{de}) \end{bmatrix} \quad (7-83)$$

回路的特征方程式为

$$S^2 + K_{f_n} S + g K_V = S^2 + 2\xi_L W_{nl} S + W_{nl}^2 = 0 \quad (7-84)$$

式中 ξ_L ——阻尼比, W_{nl} ——回路的无阻尼自然频率, $K_V = K_{f_n} K_n$ 。定义下列设计参数

$$\begin{aligned} D_L &= \frac{\phi_{nss}}{\delta \omega_n} = \frac{K_{f_n}}{g K_V} \\ \tau_L &= \frac{3}{\xi_L W_{nl}} = \frac{6}{K_{f_n}} \\ \xi_L &= \frac{K_{f_n}}{2\sqrt{g K_V}} \\ W_{nl} &= \sqrt{g K_V} \end{aligned}$$

式中 D_L ——稳态偏差与陀螺漂移之比, τ_L ——调整时间。

假设受阵风、装载等干扰作用的影响, 飞机的正弦形晃动为

$$\theta(t) = \theta_0 \sin W_d t$$

式中 θ_0 为晃动的振幅[度], W_d 为频率[弧度/秒]。若惯性测量装置距地面高度为 h [厘米], 则作用在加速度计输入端的干扰加速度 f_d 的幅值为

$$F_d = h \theta_0 W_d^2$$

由图 7.3 可求出以 $f_d(S)$ 为输入量, 以失准角 $\phi(S)$ 为输出量的传递函数

$$\frac{\phi(S)}{f_d(S)} = \frac{K_V}{S^2 + K_{f_n} S + K_V g}$$

由此得

$$\phi(S) = \frac{F_d K_V W_d}{(S^2 + K_{f_n} S + K_V g)(S^2 + W_d^2)}$$

对上式求拉氏逆变换可得由干扰加速度所引起的失准角为

$$\phi(t) = \frac{W_d K_V W_d}{\sqrt{(K_V g - W_d^2)^2 + K_I^2 W_d^2}} \left[\frac{1}{W_d} \sin(W_d t - \lambda) \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{K_V g - \frac{K_I^2}{4}}} e^{-(K_I/2)t} \sin \left(\sqrt{K_V g - \frac{K_I^2}{4}} t - \mu \right) \right]$$

式中

$$\lambda = \tan^{-1} \frac{K_I W_d}{K_V g - W_d^2}$$

$$\mu = \tan^{-1} \frac{-K_I \sqrt{K_V g - \frac{K_I^2}{4}}}{\frac{K_I^2}{2} - K_V g + W_d^2}$$

具体设计中, 一般 $K_V g$ 比 W_d^2 小一个数量级。为了简化分析, 可将 $K_V g$ 作为二阶微量予以忽略。由此可求得由于干扰加速度所引起的失准角的幅值为

$$N_L = \frac{3600 K_V \theta_0 h W_d^2}{W_d \sqrt{W_d^2 + K_I^2}} \quad [\text{角秒}]$$

对于 $W_d \gg K_I$

$$N_L = 3600 K_V \theta_0 h \quad [\text{角秒}]$$

这里有四个待求的参数 (D_L , τ_L , ζ_L 和 N_L), 但只有两个量 (K_{I_n} 和 K_V) 可供选择。设计步骤是从获得满意的瞬态响应选择 K_{I_n} 和 K_V 。然而这个响应常常是不够理想的, 因为我们还希望 N_L 和 D_L 尽可能小。一旦选出合适的瞬态响应, 要通过改变伯德图或根轨迹图来减小 D_L 和 N_L , 但它对确定 τ_L 和 ζ_L 的一对主要极点的影响应当减至最小。此外, 为了进一步衰减载体摇晃运动的影响, 还可以在前向回路中附加一个滤波器, 其交接频率高出 K_{I_n} 十倍频程。图 7-6 是改进的北向调平回路原理方块图。东向调平回路也可按同样方式

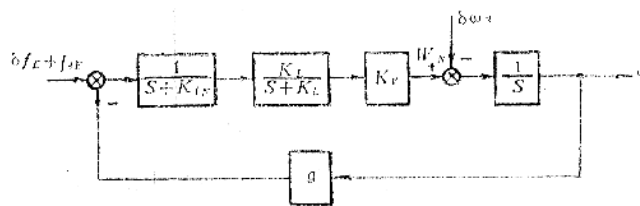


图7-6 改进的调平回路

加以改进。图 7-7 及图 7-8 分别表示改进前后两种调平回路的伯德图及根轨迹图。可以看出, 如 K_L 较 K_{I_n} 足够高, 附加滤波器对瞬态响应的影响不大。

3. 方位对准回路的设计及对准精度分析

按图 7-5 写出方位对准回路的微分方程式

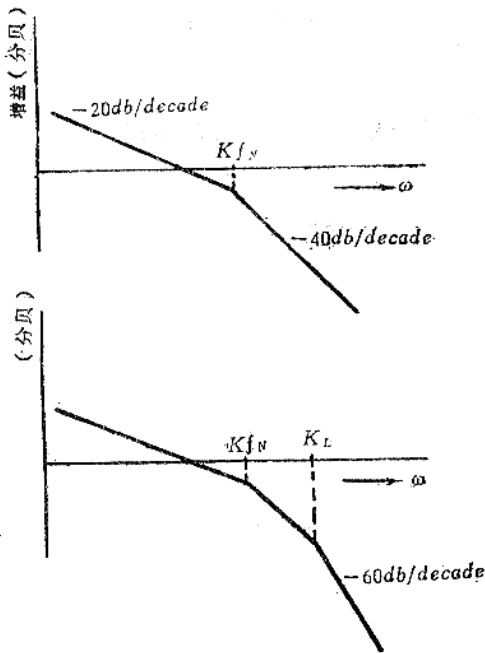


图7-7 调平回路的伯德图

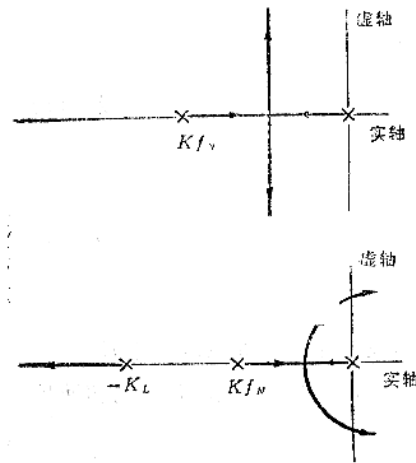


图7-8 调平回路的根轨迹图

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_e \\ \dot{\phi}_d \\ \dot{a}_e \\ \dot{a}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{i_0} \cos \varphi & -K_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_d \\ K_{f_e} g & 0 & -K_{f_e} & 0 \\ 0 & 0 & K_{f_d} & -K_{f_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_e \\ \phi_d \\ a_e \\ a_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\delta \omega_e \\ -\delta \omega_d \\ K_{f_e} (\delta f_n + f_{dn}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7-85)$$

方位对准回路的特征方程式是

$$\begin{aligned} \Delta(S) &= \begin{vmatrix} S & -\omega_{i_0} \cos \varphi & K_e & 0 \\ 0 & S & 0 & K_d \\ -K_{f_e} g & 0 & S + K_{f_e} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{f_d} & S + K_{f_d} \end{vmatrix} \\ &= S^4 + (K_{f_e} + K_{f_d})S^3 + (gK_v + K_{f_e}K_{f_d})S^2 + gK_vK_{f_d}S \\ &\quad + gK_{f_e}K_{f_d}K_a\omega_{i_0} \cos \varphi = 0 \end{aligned} \quad (7-86)$$

式中

$$K_v = K_{f_e} K_e$$

经验证明，如将这个四阶系统视为两个二阶系统的串联，并由此选择系数 K_{f_e} , K_{f_d} , K_d 和 K_e 可得到初始误差角希望的瞬态响应。

$$\begin{aligned} \Delta(S) &= [S^2 + 2\sigma S + (\sigma^2 + \omega^2)]^2 = (S + \sigma + j\omega)^2 (S + \sigma - j\omega)^2 \\ &= S^4 + 4\sigma S^3 + (6\sigma^2 + 2\omega^2)S^2 + (4\sigma^3 + 4\sigma\omega^2)S + (\sigma^4 + 2\omega^2\sigma^2 + \omega^4) \end{aligned} \quad (7-87)$$

由二阶系统的最佳控制条件 $\sigma = \omega$ 得

$$\Delta(S) = S^4 + 4\sigma S^3 + 8\sigma^2 S^2 + 8\sigma^3 S + 4\sigma^4 = 0 \quad (7-88)$$

使 (7-86) 与 (7-88) 式的对应系数相等可以选出系统参数

$$\left. \begin{aligned} K_{fe} &= K_{fd} = 2\sigma \\ K_e &= \frac{2\sigma}{g} \\ K_d &= \frac{\sigma^2}{g\omega_{ie}\cos\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (7-89)$$

方程式 (7-85) 的拉氏变换解为

$$\begin{pmatrix} \phi_e(S) \\ \phi_d(S) \\ a_e(S) \\ a_d(S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & -\omega_{ie}\cos\varphi & K_e & 0 \\ 0 & S & 0 & K_d \\ -K_{fe}g & 0 & S+K_{fe} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{fd} & S+K_{fd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_e(0) \\ \phi_d(0) \\ a_e(0) \\ a_d(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\delta\omega_e(S) \\ -\delta\omega_d(S) \\ K_{fe}[\delta f_n(S) + f_{dn}(S)] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7-90)$$

式中系数阵的逆是

$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta(S)} \begin{pmatrix} \frac{S(S+K_{fe})}{(S+K_{fd})} & \frac{-\omega_{ie}\cos\varphi(S+K_{fe})}{(S+K_{fd})} & \frac{-S(S+K_{fd})K_e}{-\omega_{ie}\cos\varphi K_d K_{fd}} & \frac{-\omega_{ie}\cos\varphi K_d}{(S+K_{fe})} \\ gK_d K_{fe} K_{fd} & \frac{S(S+K_{fe})(S+K_{fd})}{+gK_e K_{fe}(S+K_{fd})} & SK_d K_{fd} & \frac{SK_d(S+K_{fe})}{+gK_e K_d K_{fe}} \\ gK_{fe} S(S+K_{fd}) & \frac{-gK_{fd}\omega_{ie}\cos\varphi}{(S+K_{fd})} & S^2(S+K_{fd}) & \frac{-K_d\omega_{ie}\cos\varphi}{gK_e} \\ gSK_{fe} K_{fd} & \frac{-g\omega_{ie}\cos\varphi K_{fe} K_{fd}}{S} & S^2 K_{fd} & \frac{S^2(S+K_{fe})}{+gK_{fd} K_e S} \end{pmatrix} \quad (7-91)$$

利用终值定理可以求出由仪表偏置引起的失准角稳态误差

$$\left. \begin{aligned} \phi_{ess} &= -\frac{\delta\omega_d}{gK_d} - \frac{\delta f_n}{g} \\ \phi_{dss} &= -\frac{\delta\omega_e}{\omega_{ie}\cos\varphi} - \frac{K_e\delta\omega_d}{K_d\omega_{ie}\cos\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (7-92)$$

适当选择 K_d , K_e 的值可使稳态误差主要取决于 $\delta f_n/g$ 及 $\delta\omega_e/\omega_{ie}\cos\varphi$ 项。这个结果说明, 捷联系统常规对准的精度与平台系统常规对准是一样的。

从方程式 (7-90) 与 (7-91) 可以导出方位失准角 ϕ_d 对干扰加速度 f_{dn} 的响应。

$$\phi_d(S) = \frac{1}{\Delta(S)} SK_d K_{fd} K_{fe} f_{dn}(S) \quad (7-93)$$

为了简化分析, 假设 $\omega = 0$, 即系统特征方程式有四个相同的负实根。此时, 把 (7-89) 代入上式得

$$\begin{aligned} \phi_d(S) &= \frac{4S\sigma^4}{g\omega_{ie}\cos\varphi(S+\sigma)^4} f_{dn}(S) \\ &= \frac{4}{\omega_{ie}\cos\varphi} \frac{S}{(TS+1)^4} \frac{f_{dn}(S)}{g} \end{aligned} \quad (7-94)$$

式中 $T=1/\sigma$ 是方位对准回路的时间常数。如果正弦形干扰加速度为

$$f_{dn}(t) = F_{dn}\sin W_d t$$

则方位失准角峰值

$$|\phi_d|_{max} = \frac{4}{\omega_{ie}\cos\varphi} \left| \frac{jW_d}{(1+jW_d T)^4} \right| \frac{F_{dn}}{g} \quad (7-95)$$

若取下列典型动态参数：

容许值 $|\phi_d|_{max} = 0.1 \text{ m}\cdot\text{rad}$

干扰加速度幅值 $F_{dn} = 10^{-4} g$

干扰频率 $W_d = 10^{-1} \text{ rad/sec}$

纬度 $\varphi = 45^\circ$

按 (7-95) 式可算出需要的时间常数为 $T \approx 95 \text{ sec}$ 。在四阶系统中，大约经过 7 倍的时间常数后，初始误差可衰减到允许的范围。即对所述干扰水平，陀螺罗经对准时间约为 11 分钟。

调平回路中的附加的滤波器对方位对准回路瞬态响应的影响小于对调平回路瞬态响应的影响。图 7-9 是改进的方位对准回路原理方块图。为了减小噪声对方位回路的影响，选择 K_{fd} 使其在调平回路自然频率以下 1/2 十倍频程。由此取

$$K_{fd} = \frac{W_{nt}}{\sqrt{10}} \quad (7-96)$$

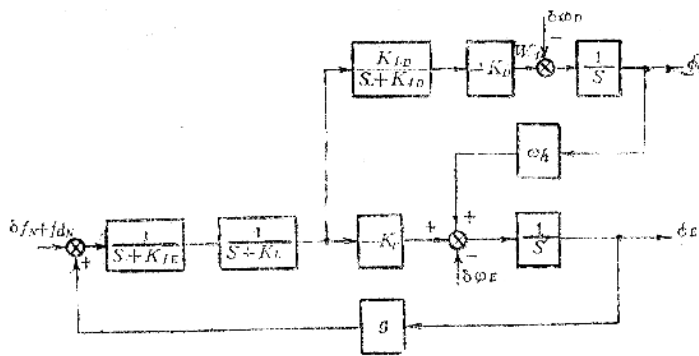


图7-9 改进的方位对准回路

§ 7-3 卡尔曼滤波在初始对准中的应用

捷联惯导系统的对准精度主要受惯性仪表的随机误差和外加干扰加速度的影响，同时还受到时间的限制。如果采用卡尔曼滤波，用滤波器估计捷联平台的三个失准角，则不论是即

时地修正掉估计出的失准角，还是对准结束（也是估计结束）时统一校正，滤波器都能起到对准的作用；其次，由于滤波器是针对系统噪声和量测噪声的统计数据来进行估计的，所以滤波估计能较好的克服各种随机误差的影响，再加上滤波器的其它优点，如能合理设计滤波器，对准的精度就能比古典的对准方案为高，对准时间也能相对减少。这一节我们将介绍一种利用东向陀螺仪提取方位失准角信息，采用卡尔曼滤波技术的精对准方案，并简要说明其数字模拟结果。

一、系统模型

设计滤波器时，应首先建立系统模型的状态方程和量测方程。描述捷联系统自对准过程的动力学方程式包括：失准角微分方程式，惯性仪表输出方程式和飞机摇晃运动及角振动方程式。

1. 状态方程

1.1 失准角微分方程式

粗对准后，失准角是小角度，由（7—76）—（7—78）式可以写出只进行参数估计未加修正指令时的失准角微分方程式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_n &= -\omega_{ie} \sin \varphi \phi_e - \delta \omega_n \\ \dot{\phi}_e &= \omega_{ie} \sin \varphi \phi_n + \omega_{ie} \cos \varphi \phi_d - \delta \omega_e \\ \dot{\phi}_d &= -\omega_{ie} \cos \varphi \phi_e - \delta \omega_d \end{aligned} \right\} \quad (7-97)$$

式中 $\delta \omega_n$ 、 $\delta \omega_e$ 、 $\delta \omega_d$ 是沿 n 系分解的陀螺漂移率。由于对准时间比较短，陀螺漂移的数学模型可建立为随机常数，

$$\dot{\delta \omega} = 0 \quad (7-98)$$

1.2 惯性仪表的输出及其微分方程式

沿计算参考系 n' 的 N' 轴和 E' 轴的加速度表输出为

$$P_1(t) = \int_{t_0}^t [g\phi_e(\tau) + \dot{V}_1(\tau)] d\tau \quad (7-99)$$

$$P_2(t) = \int_{t_0}^t [-g\phi_n(\tau) + \dot{V}_2(\tau)] d\tau \quad (7-100)$$

式中 $\dot{V}_1(t)$ 和 $\dot{V}_2(t)$ 是机体摇晃加速度。此处，由于加速度计误差比较小，忽略了加速度计偏置的影响。将（7—99）、（7—100）式微分，得到

$$\dot{P}_1 = g\phi_e + \dot{V}_1 \quad (7-101)$$

$$\dot{P}_2 = -g\phi_n + \dot{V}_2 \quad (7-102)$$

这表明，从水平加速度计输出能提取失准角 ϕ_n 、 ϕ_e 。

由地球速率计算的东向分量 ω_e' 可以求出失准角 ϕ_d 。

$$\omega_e' = -\omega_{ie} \cos \varphi (\phi_d + \phi_n \tan \varphi) + \omega_{de} + \delta \omega_e \quad (7-103)$$

陀螺仪输出的东向分量为

$$P_3(t) = \int_{t_0}^t [-\omega_{ie} \cos \varphi \phi_d(\tau) - \omega_{ie} \sin \varphi \phi_n(\tau) + \delta \omega_e + \theta(\tau)] d\tau \quad (7-104)$$

式中 θ 为沿 E' 轴的干扰角振动。将 (7-104) 式微分, 得到

$$\dot{P}_3 = -\omega_{ie} \cos \varphi \dot{\phi}_d - \omega_{ie} \sin \varphi \dot{\phi}_n + \dot{\theta} + \delta \omega_e \quad (7-105)$$

1.3 摇晃速度及角振动方程式

摇晃速度的数学模型建立为相关噪声过程, 它沿 N' 轴的相关函数为

$$R_v(t) = \sigma_v^2 e^{-|t|/\tau_1} \cos \omega_1 t \quad (7-106)$$

式中 σ_v^2 是过程的方差, ω_1 是过程功率谱的中心频率, τ_1 是相关时间。为了能在白噪声激励下产生这个随机变量, 取

$$V_1(t) = n_1(t) \cos \omega_1 t + n_2(t) \sin \omega_1 t \quad (7-107)$$

式中 $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 是独立的随机变量, 其相关函数为

$$R_{n_1}(t) = R_{n_2}(t) = \sigma_v^2 e^{-|t|/\tau_1} \quad (7-108)$$

且满足如下方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{n}_1(t) &= (-1/\tau_1)n_1(t) + W_1(t) \\ \dot{n}_2(t) &= (-1/\tau_1)n_2(t) + W_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (7-109)$$

式中 $W_1(t)$ 和 $W_2(t)$ 是零均值白噪声, 其协方差阵为

$$E\{W_1(t_1)W_1^T(t_2)\} = E\{W_2(t_1)W_2^T(t_2)\} = \frac{2\sigma_v^2}{\tau_1} \delta(t_1 - t_2) \quad (7-110)$$

对于沿 E' 轴的摇晃速度, 可写出类似的方程

$$V_2(t) = n_3(t) \cos \omega_1 t + n_4(t) \sin \omega_1 t \quad (7-111)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{n}_3(t) &= (-1/\tau_1)n_3(t) + W_3(t) \\ \dot{n}_4(t) &= (-1/\tau_1)n_4(t) + W_4(t) \end{aligned} \right\} \quad (7-112)$$

$$E\{W_3(t_1)W_3^T(t_2)\} = E\{W_4(t_1)W_4^T(t_2)\} = \frac{2\sigma_v^2}{\tau_1} \delta(t_1 - t_2) \quad (7-113)$$

干扰角振动的数学模型亦建立为相关噪声过程, 取

$$R_\theta(t) = \sigma_\theta^2 e^{-|t|/\tau_2} \cos \omega_2 t \quad (7-114)$$

$$\theta(t) = n_5(t) \cos \omega_2 t + n_6(t) \sin \omega_2 t \quad (7-115)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{n}_5(t) &= (-1/\tau_2)n_5(t) + W_5(t) \\ \dot{n}_6(t) &= (-1/\tau_2)n_6(t) + W_6(t) \end{aligned} \right\} \quad (7-116)$$

$$E\{W_5(t_1)W_5^T(t_2)\} = E\{W_6(t_1)W_6^T(t_2)\} = \frac{2\sigma_\theta^2}{\tau_2} \delta(t_1 - t_2) \quad (7-117)$$

τ_2 值越大, 振动谱带宽越窄。地面上飞行器的干扰振动可近似为单一频率的正弦波。

将 (7-107)、(7-111)、(7-115) 和 (7-109)、(7-112)、(7-116) 诸式合并, 得到

$$\eta(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{n}(t) \quad (7-118)$$

$$\dot{\eta}(t) = \mathbf{A}\mathbf{n}(t) + \mathbf{W}(t) \quad (7-119)$$

式中

$$\eta(t) = [V_1(t), V_2(t), \theta(t)]^T$$

$$Q(t_i) = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 [1 - e^{-2(t_i - t_{i-1})/\tau_1}] I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \sigma_\theta^2 [1 - e^{-2(t_i - t_{i-1})/\tau_2}] I \end{bmatrix} \quad (7-128)$$

2. 量测方程

系统的测量值包括加速度表及陀螺仪的输出。由于惯性仪表输出的量化，还有附加的测量噪声。量测方程为

$$Y(t_i) = H(t_i)X(t_i) + T(t_i) \quad (7-129)$$

式中

$$H(t_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

量化噪声 $T(t_i)$ 是零均值白噪声序列，其协方差阵为

$$E\{T(t_i)T^T(t_j)\} = R(t_i)\delta_{ij} \quad (7-130)$$

$$R(t_i) = \begin{bmatrix} \Delta_1^2/12 & 0 \\ & \Delta_2^2/12 \\ 0 & & \Delta_2^2/12 \end{bmatrix} \quad (7-131)$$

式中 Δ_1 是加速度计量化值， Δ_2 是陀螺仪量化值。

二、最优滤波器及计算结果

1. 滤波方程

离散卡尔曼滤波方程为

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}(t_i, t_{i-1}) &= \Phi(t_i, t_{i-1})\hat{X}(t_{i-1}) \\ \hat{X}(t_i) &= \hat{X}(t_i, t_{i-1}) + K(t_i)[Y(t_i) - H(t_i)\hat{X}(t_i, t_{i-1})] \\ K(t_i) &= P(t_i, t_{i-1})H^T(t_i)[H(t_i)P(t_i, t_{i-1})H^T(t_i) + R(t_i)]^{-1} \\ P(t_i, t_{i-1}) &= \Phi(t_i, t_{i-1})P(t_{i-1})\Phi^T(t_i, t_{i-1}) + G(t_{i-1})Q(t_{i-1})G^T(t_{i-1}) \\ P(t_i) &= [I - K(t_i)H(t_i)]P(t_i, t_{i-1}) \end{aligned} \right\} \quad (7-132)$$

式中

$\hat{X}(t_i)$ ——在给出测量值 $\{Y(t_1) \cdots Y(t_i)\}$ 后， $X(t_i)$ 的最优估值

$\hat{X}(t_i, t_{i-1})$ ——在给出测量值 $\{Y(t_1) \cdots Y(t_{i-1})\}$ 后， $X(t_i)$ 的最优估值

$K(t_i)$ ——卡尔曼滤波在 t_i 时刻的最佳增益阵

$P(t_i)$ —— t_i 时刻状态估计误差的协方差阵

$P(t_i, t_{i-1})$ —— t_i 时刻预报误差的协方差阵

离散卡尔曼滤波器的方块图和滤波器增益 $K(t_i)$ 的计算流程图分别如图(7-10)和图(7-11)所示。

2. 计算结果

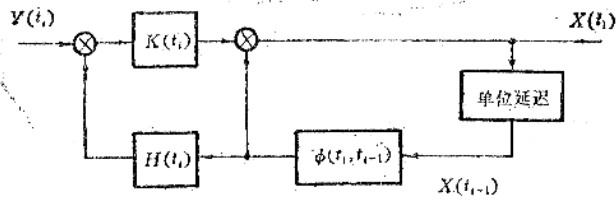


图7-10 离散卡尔曼滤波器

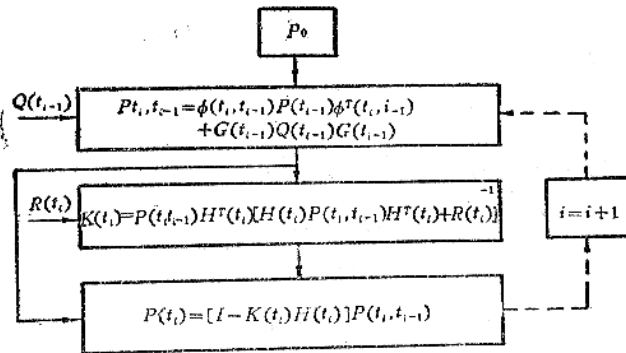


图7-11 滤波增益 $K(i)$ 的计算流程图

图 7-12 和图 7-13 示出在 FELIXC256 计算机上用最优滤波器对失准角进行估值的计算结果。计算中误差模型参数取下列标称值：

- | | |
|--------|--|
| 陀螺漂移率 | $\sigma_{\delta\omega} = 0.015^\circ/\text{h}$ |
| 机体摇晃速度 | $\sigma_v = 0.5\text{m}/\text{sec}$ |
| 中心频率 | $\omega_1 = 1.57\text{rad}/\text{sec}$ |
| 相关时间 | $\tau_1 = 20\text{sec}$ |
| 干扰角振动 | $\sigma_\theta = 1^\circ$ |
| 中心频率 | $\omega_2 = 5\text{rad}/\text{sec}$ |
| 相关时间 | $\tau_2 = 100_s$ |
| 初始失准角 | $\sigma_\phi = 0.5^\circ$ |
| 加速计量化值 | $\Delta_1 = 0.02\text{m}/\text{sec}$ |
| 陀螺仪量化值 | $\Delta_2 = 2''$ |
| 对准地点纬度 | $\varphi = 35^\circ$ |
| 采样周期 | 1 sec |

初始估计值取为

$$\hat{X}_0 = E\{X(0)\} = 0$$

于是

$$P_0 = E\{X(0)X^T(0)\}$$

P_0 取成对角线阵，对角线元素分别为

$$E\{X_{i0}^2\} = \sigma_{i0}^2, \quad i = 1, 2, \dots, 15$$

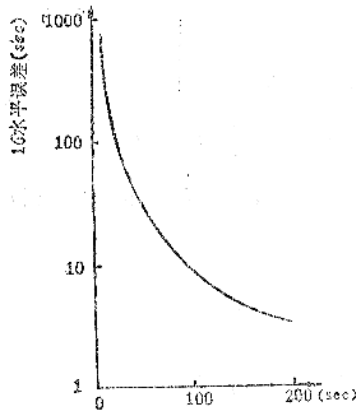


图7-12 1σ水平误差

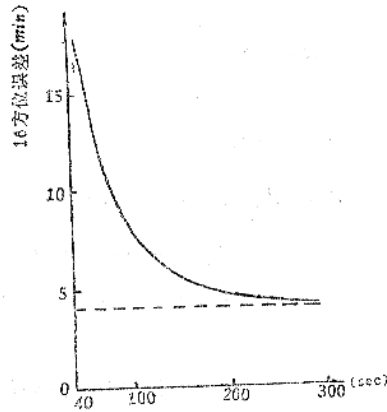


图7-13 1σ方位误差

计算结果表明:

(1) 与常规对准相比, 系统性能有明显改善。水平失准角估值误差 (1σ) 在 90 sec 后即小于 $10''$ 。方位失准角估值误差 (1σ) 在 300 sec 时已接近由等效东向陀螺漂移所限定的稳定值 $4.2'$ 。

(2) 由于重力加速度值比较大, 通过加速度计输出可直接感测水平失准角信息, 估值误差稳态值主要与摇晃加速度干扰量和量化噪声有关。因为地球速率东向分量信号很弱, 加之受干扰振动及仪表量化噪声影响 (在所取数据下, 信噪比约为 3.8×10^{-3}), 从而拖长了从中提取方位失准角信息的时间。估值误差下降得较慢, 且其稳态值主要受东向陀螺漂移限制。

三、次优滤波器及计算结果

针对减轻计算机负担, 须研究简化最优滤波方程的可能性。为了考察简化的合理性应估计误差模型参数变动时滤波性能的变化。

1. 系统模型

由于对准时间很短, 在方程式 (7-125) 中忽略地球速率影响后可使 ϕ_e 通道与 ϕ_n 、 ϕ_d 通道解耦。 ϕ_e 通道状态方程式为

$$X_1(t_i) = \Phi_1(t_i, t_{i-1})X_1(t_{i-1}) + G_1(t_{i-1})U(t_{i-1}) \quad (7-133)$$

式中

$$X_1 = [\phi_e, \delta\omega_e, P_1, n_1, n_2]^T$$

$$\Phi_1(t, t-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{31} & \phi_{32} & 1 & \phi_{34} & \phi_{35} \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{55} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1(t_{i-1}) &= [u_1(t_{i-1}), u_2(t_{i-1})]^T \\ \mathbf{G}_1(t_{i-1}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos\omega_1 t_{i-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\omega_1 t_{i-1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \phi_{31} &= g(t_i - t_{i-1}) & \phi_{32} &= -\frac{g}{z}(t_i - t_{i-1})^2 \\ \phi_{34} &= \phi_{44} \cos\omega_1 t_i - \cos\omega_1 t_{i-1} & \phi_{35} &= \phi_{44} \sin\omega_1 t_i - \sin\omega_1 t_{i-1} \\ \phi_{44} &= \phi_{55} = e^{-(t_i - t_{i-1})/\tau_1} \\ \mathbf{Q}_1(t_i) &= \sigma_v^2 [1 - e^{-2(t_i - t_{i-1})/\tau_1}] I \end{aligned} \quad (7-134)$$

量测方程为

$$\mathbf{Y}_1(t_i) = \mathbf{H}_1(t_i) \mathbf{X}_1(t_i) + \mathbf{T}_1(t_i) \quad (7-135)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(t_i) &= [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \\ \mathbf{R}_1(t_i) &= A_1^2/12 \end{aligned} \quad (7-136)$$

ϕ_N 及 ϕ_D 通道状态方程式为

$$\mathbf{X}_2(t_i) = \Phi_2(t_i, t_{i-1}) \mathbf{X}_2(t_{i-1}) + \mathbf{G}_2(t_{i-1}) \mathbf{U}_2(t_{i-1}) \quad (7-137)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_2 &= [\phi_n, \phi_d, \delta\omega_n, \delta\omega_e, \delta\omega_d, P_2, P_3, n_3, n_4, n_5, n_6]^T \\ \Phi_2(t_i, t_{i-1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{61} & 0 & \phi_{63} & 0 & 0 & 1 & 0 & \phi_{68} & \phi_{69} & 0 & 0 \\ \phi_{71} & \phi_{72} & \phi_{73} & \phi_{74} & \phi_{75} & 0 & 1 & 0 & 0 & \phi_{7,10} & \phi_{7,11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{88} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{90} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{10,10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{11,11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_2(t_{i-1}) &= [u_3(t_{i-1}), u_4(t_{i-1}), u_5(t_{i-1}), u_6(t_{i-1})]^T \\ \mathbf{G}_2(t_i) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\omega_1 t_{i-1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\omega_1 t_{i-1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\omega_2 t_{i-1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\omega_2 t_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{61} &= -g(t_i - t_{i-1}) & \phi_{63} &= \frac{g}{2} (t_i - t_{i-1})^2 \\
\phi_{71} &= -\omega_{ie} \sin \varphi (t_i - t_{i-1}) & \phi_{22} &= -\omega_{ie} \cos \varphi (t_i - t_{i-1}) \\
\phi_{73} &= \frac{1}{2} \omega_{ie} \sin \varphi (t_i - t_{i-1})^2 & \phi_{75} &= \frac{1}{2} \omega_{ie} \cos \varphi (t_i - t_{i-1})^2 \\
\phi_{74} &= t_i - t_{i-1} & \phi_{88} &= \phi_{99} = e^{-(t_i - t_{i-1})/\tau_1} \\
\phi_{68} &= \phi_{88} \cos \omega_1 t_i - \cos \omega_1 t_{i-1} & \phi_{69} &= \phi_{88} \sin \omega_1 t_i - \sin \omega_1 t_{i-1} \\
\phi_{7,10} &= \phi_{10,10} \cos \omega_2 t_i - \cos \omega_2 t_{i-1} & \phi_{7,11} &= \phi_{10,10} \sin \omega_2 t_i - \sin \omega_2 t_{i-1} \\
\phi_{10,10} &= \phi_{11,11} = e^{-(t_i - t_{i-1})/\tau_2} \\
\mathbf{Q}_2(t_i) &= \begin{bmatrix} \sigma_V^2 [1 - e^{-2(t_i - t_{i-1})/\tau_1}] I & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \sigma_\theta^2 [1 - e^{-2(t_i - t_{i-1})/\tau_2}] I \end{bmatrix} \quad (7-138)
\end{aligned}$$

量测方程为

$$\mathbf{Y}_2(t_i) = \mathbf{H}_2(t_i) \mathbf{X}_2(t_i) + \mathbf{T}_2(t_i) \quad (7-139)$$

式中

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_2(t_i) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{R}_2(t_i) &= \begin{bmatrix} A_1^2/12 & 0 \\ 0 & A_2^2/12 \end{bmatrix} \quad (7-140)
\end{aligned}$$

2. 计算结果

针对系统误差模型中的不同变动参数（其他误差参数取标称值），用次优滤波器进行估值的计算结果示于图 7-14~图 7-21 中。

可以看出

(1) 初始失准角在 0.5° 到 2° 之间变化时，滤波性能没有明显变化。方位失准角初始值小于 0.5° 时，与最优滤波器相比，在 200 sec 以前误差小于 $25''$ 。

(2) 窄通带噪声过程相关时间对滤波性能有较显著的影响。 τ_1 的变动只影响水平误差， τ_2 的变动也仅影响方位误差，它们之间的交叉耦合效应很小。当 τ_1 增大到 100 sec 时（对应于水平通道信噪比增大），约在 60 sec，水平失准角估值误差即可降到 $3''$ 。如 τ_2 减小为 $10h$ （相当于方位通道噪声过程通带加宽，噪声增大，信噪比减小为 1.2×10^{-3} ），需经 500 sec 方位失准角估值误差始能降到 $4.2'$ 。

(3) 滤波器对摇晃运动中心频率及干扰振动中心频率变动的灵敏度并不显著。以方位估值为例，若频率增大至 8 rad/sec，它仍可在 300 sec 内达到其稳定值。

(4) 陀螺漂移变化对水平失准角估值性能影响较小，但东向陀螺漂移却限制了方位对准精度。若陀螺漂移为 $0.03^\circ/h$ ，则稳态失准角为 $8.37'$ 。

四、几点看法

(1) 在捷联惯导系统的初始对准中，解析对准主要用作粗对准，以迅速算出平均变换矩

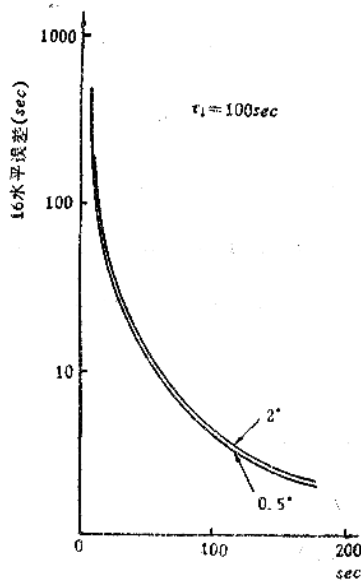


图7—14 不同初始水平失准角时的估值误差

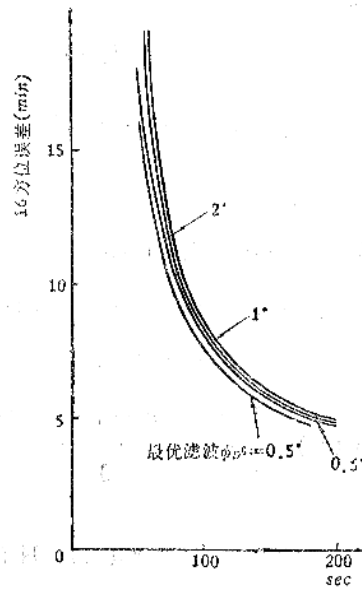


图7—15 不同初始方位失准角时的估值误差

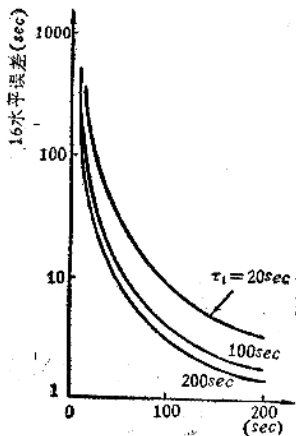


图7—16 不同摇晃速度相关时间的水平误差

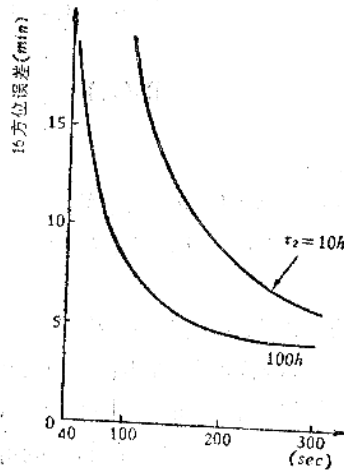


图7—17 不同干扰振动相关时间的方位误差

阵，其后可采用本节所述的精对准方法对惯性仪表输出值进行数据处理，求出失准角的最优估值，利用控制器对姿态变换矩阵 C_b^c 元素进行精校正。

(2) 使用次优滤波器不仅能提高对准性能而且可减轻计算机负担。与最优滤波器相比，性能虽略有下降，但按目前机载计算机速度及容量估计，可减少约52%的计算时间，滤波器存储量约需2.2K字。

(3) 在所取系统误差模型的典型参数情况下，与常规对准法相比，采用直接从东向陀螺输出提取方位失准角信息，利用卡尔曼滤波进行初始对准的方法，可以缩短对准时间，并提高动基座上的对准精度。

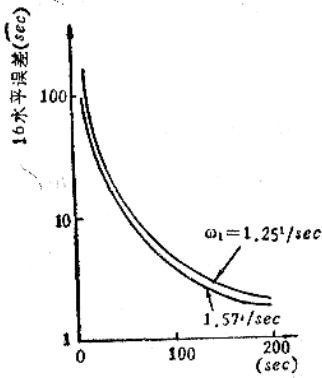


图7-18 不同摇晃速度中心频率的水平误差

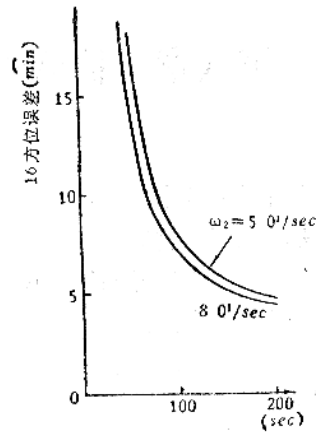


图7-19 不同干扰振动中心频率的方位误差

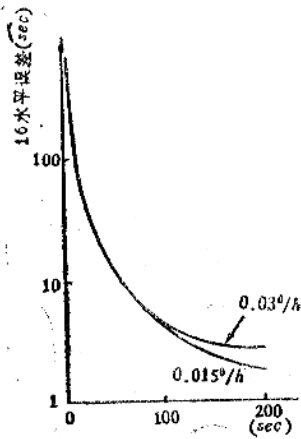


图7-20 不同陀螺漂移时的水平误差

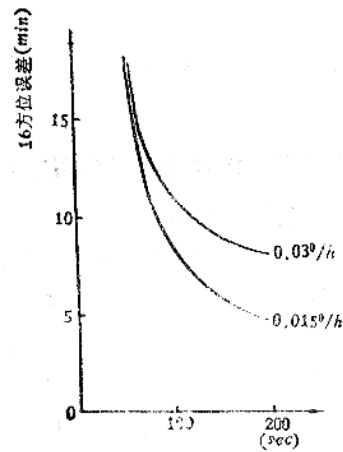


图7-21 不同陀螺漂移时的方位误差

最后应当指出，应用现代控制理论的对准方案，要求对系统误差模型及干扰运动误差模型有比较好的了解。从上述分析亦可看出，滤波性能对误差源参数的变动有时会比较灵敏。此外，系统结构比较复杂，增大了机载计算机的工作量。这些问题在选择对准方案时应针对具体情况权衡考虑。

第八章 捷联惯性仪表配置中的余度技术

在常规的惯导系统中,一般是把三个单自由度陀螺仪和单轴加速度表的测量轴沿相互垂直的三个参考轴配置。这时,若任一个惯性仪表发生故障,系统就不能正常工作了。实践证明,陀螺仪是可靠性比较低的惯性仪表。为了提高捷联式惯导系统的可靠性,可以采用两种方法,其一是提高单个惯性仪表的可靠性,以降低故障发生率,其二是构成余度惯性仪表系统(简称余度系统),以增加仪表的故障容许次数。本章将采取后一种方法,分析四、五、六个单轴惯性仪表(例如单自由度陀螺仪)和双轴惯性仪表(例如双自由度陀螺仪)的最佳余度配置,阐述怎样借助于软件技术构成惯性仪表的故障自动检测与识别,以提高系统的可靠性,并分析如何通过数据处理改善整个系统的性能。

§ 8—1 余度惯性仪表的测量方程式

一、单轴惯性仪表的余度配置方案

构成余度系统的单轴惯性仪表的个数只要四个以上即可。一般说来,仪表个数增加,系统的可靠性便提高。惯性仪表的配置大致可分为两种,即测量轴的正交配置方案与非正交配置方案。虽然对它们难以进行单纯的比较,但如果只从可靠性方面考虑,后者要比前者好。这是因为在容许配置的惯性仪表数目中仅允许一定个数的仪表出故障。例如,若将四、五、六个惯性仪表非正交安装时,分别只允许任意一、二、三个仪表出故障。可是,如把四、五个惯性仪表正交配置时,由于有的轴只安装一个仪表,故若这一个仪表出故障,系统就不能使用了。余度系统的可能配置方案有许多种,非正交配置的模型可根据惯性仪表个数取为四陀螺仪系统,五陀螺仪系统和六陀螺仪系统。它们分别允许任意一、二、三个仪表出故障。因此,在用相同数目的惯性仪表时,非正交配置比任何正交配置时的可靠性都高。

1. 四陀螺仪系统

图 8—1 和图 8—2 示出其典型配置模型。图中, α 为仪表的安装角,其最佳值在后面叙述(参照 8.2 节)。各仪表测量轴方向的单位矢量 i_j ($j=1\sim 4$) 的 j 表示仪表的排列顺序。参考正交坐标轴方向的单位矢量为 i_x, i_y, i_z 。图 8—1 (四陀螺仪系统 No.1) 中, i_1, i_2, i_3 和 i_x, i_y, i_z 一致, i_4 由下式确定

$$i_4 \cdot i_z = \cos \alpha \quad (8-1)$$

$$i_4 \cdot i_x = (\sqrt{2}/2) \sin \alpha \quad (8-2)$$

被测的飞行器姿态角速率沿参考正交坐标轴方向分解。以各仪表测量轴和参考正交坐标轴间的方向余弦为元素所组成的矩阵 H 称为测量矩阵。它反映出理想情况下(即不计测量误差),沿各测量轴方向所能测出的姿态角速率。

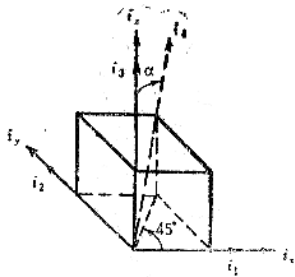


图8-1 非正交配置的四陀螺仪系统 (No.1)

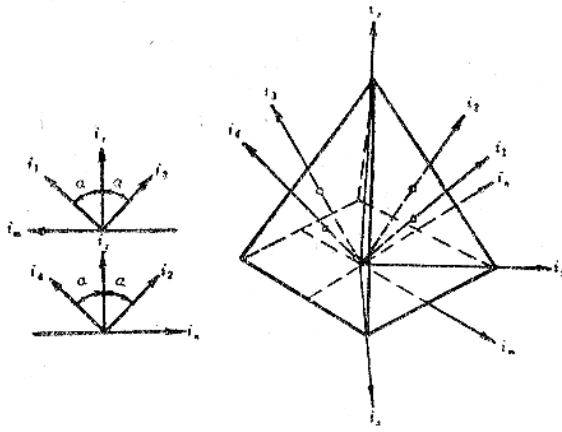


图8-2 非正交配置的四陀螺仪系统 (No.2)

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha & \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (8-3)$$

在图 8-2 (四陀螺仪系统 No.2) 中,

$$i_j \cdot i_k (j=1 \sim 4) = \cos \alpha \quad (8-4)$$

$$i_1 \cdot i_x = i_1 \cdot i_y = i_2 \cdot i_y = i_4 \cdot i_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \quad (8-5)$$

$$i_2 \cdot i_x = i_3 \cdot i_x = i_3 \cdot i_y = i_4 \cdot i_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \quad (8-6)$$

由各仪表测量轴和参考正交坐标轴的方向余弦所组成的测量矩阵为

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha & \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha & \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha & -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha & -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (8-7)$$

四个陀螺仪的测量值 $m_j (j=1 \sim 4)$ 与飞行器姿态角速率 ω 沿参考正交轴方向的分量的关系, 可以表示成下述矩阵形式

$$m = H\omega + \xi \quad (8-8)$$

$$\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3, m_4]^T$$

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$$

ξ 为测量误差矢量, 假定其统计特性为

$$E\{\xi\} = 0; \quad E\{\xi \xi^T\} = \sigma^2 I \quad (8-9)$$

此处, I 是 4×4 单位矩阵, σ^2 是测量误差方差。

2. 五陀螺仪系统

图 8-3 示出其典型配置模型, 各仪表测量轴是沿着绕 z 轴的圆锥的母线。各仪表测量轴的相互关系为

$$i_1 \cdot i_2 = i_2 \cdot i_3 = i_3 \cdot i_4 = i_4 \cdot i_5 = i_5 \cdot i_1 \quad (8-10)$$

仪表轴和三个参考正交轴间的关系为

$$i_j \cdot i_z (j=1 \sim 5) = \cos \alpha \quad (8-11)$$

$$i_1 \cdot i_x = \sin \alpha \quad (8-12)$$

$$i_2 \cdot i_x = i_5 \cdot i_x = \sin \alpha \cos \beta \quad (8-13)$$

$$i_2 \cdot i_y = -i_5 \cdot i_y = \sin \alpha \sin \beta \quad (8-14)$$

$$i_3 \cdot i_x = i_4 \cdot i_x = -\sin \alpha \cos \frac{\beta}{2} \quad (8-15)$$

$$i_3 \cdot i_y = -i_4 \cdot i_y = \sin \alpha \sin \frac{\beta}{2} \quad (8-16)$$

$$\beta = 72^\circ$$

α 的最佳值在后面叙述。由各仪表测量和参考正交坐标轴的方向余弦所组成的测量矩阵为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \frac{\beta}{2} & \sin \alpha \sin \frac{\beta}{2} & \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \alpha \sin \frac{\beta}{2} & \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (8-17)$$

五陀螺仪系统的测量方程式为

$$\mathbf{m} = \mathbf{H}\boldsymbol{\omega} + \xi \quad (8-18)$$

式中

$$\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3, m_4, m_5]^T$$

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$$

$$E\{\xi\} = 0; \quad E\{\xi \xi^T\} = \sigma^2 I$$

此处, I 是 5×5 单位矩阵。

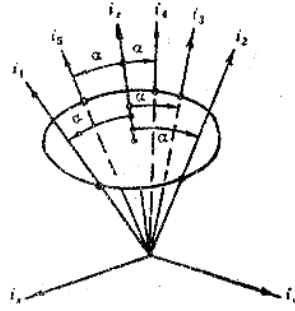


图8-3 非正交配置的五陀螺仪系统

3. 六陀螺仪系统

图8—4示出其典型配置模型，六个仪表测量轴和正十二面体的各个平行面相互垂直。仪表测量轴和三个参考正交轴间的关系为

$$i_1 \cdot i_2 = i_2 \cdot i_3 = i_3 \cdot i_4 = i_4 \cdot i_5 = i_5 \cdot i_6 = i_6 \cdot i_1 = \cos \alpha \quad (8-19)$$

$$i_1 \cdot i_x = i_3 \cdot i_y = i_5 \cdot i_z = -i_2 \cdot i_x = -i_4 \cdot i_y = -i_6 \cdot i_z = \sin \alpha \quad (8-20)$$

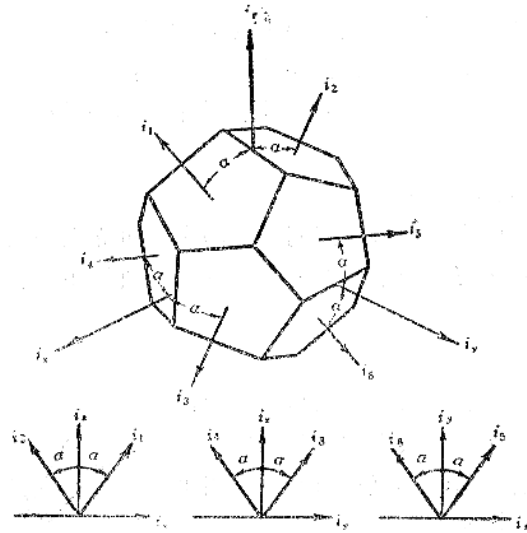


图8—4 非正交配置的六陀螺仪系统

α 的最佳值在后面叙述。由各仪表测量轴和参考正交坐标轴的方向余弦所组成的测量矩阵为

$$H = \begin{bmatrix} \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \quad (8-21)$$

六陀螺仪系统的测量方程式为

$$m = H\omega + \xi \quad (8-22)$$

式中

$$m = [m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6]^T$$

$$\omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$$

$$E\{\xi\} = 0; \quad E\{\xi \xi^T\} = \sigma^2 I$$

此处， I 是 6×6 单位矩阵。

由上述看出，在四陀螺仪系统、五陀螺仪系统与六陀螺仪系统中，只要有任意三个陀螺仪是正常的，便可以得到一个沿参考正交坐标系分解的姿态角速率估值。以后的分析表明，三种系统均具有自主的故障检测与识别能力。例如，四陀螺仪系统可以检测一个故障陀螺；

五陀螺仪系统可以识别一个故障陀螺，检测二个故障陀螺；而六陀螺仪系统可以识别二个故障陀螺，检测三个故障陀螺。类似的情况也适用于单轴加速度计。

二、双轴惯性仪表的余度配置方案

每个双轴惯性仪表可提供沿两个正交方向的测量信号。为了测量飞行器的姿态角速率，至少需要二个双自由度陀螺仪。二个双自由度陀螺可以输出四个角速率测量值，它有一个是重复的。与单自由度陀螺相比，采用双自由度陀螺的优点是：

(1) 在所用陀螺仪数目相同时，可得到更高的可靠性；

(2) 在仪表测量轴沿着飞行器轴安装时，仪表误差的影响较小，数据处理中的计算也较简单；

(3) 可提供更多的余度测量信息。

采用四个双轴惯性代表的余度系统，能明显提高系统可靠性和改善导航性能，可以提供更多的系统编排形式。以陀螺仪自旋轴的方位来区分，其典型布局有对称配置，正交配置和共面配置。

1. 对称配置

图8—5示出其典型配置模型。各代表自旋轴方向的单位矢量 h_{is} ($i=1\sim 4$) 的 i 表示仪表的排列顺序。各仪表测量轴方向的单位矢量为 h_{i1} , h_{i2} ($i=1\sim 4$)。四个自旋轴的对称配置具有下述性质：

$$|h_{is} \cdot h_{js}| = K \quad (i \neq j) \quad (8-23)$$

式中 K 为一常数。从几何图形上讲，这表示任一对自旋轴间的夹角或者相等，或者是这个角度的补角。选择八面体布局作为对称配置的一个典型。此时， $K = \frac{1}{3}$ 。

四个自旋轴各垂直于正八面体上半部的每个平面。陀螺仪的两个测量轴位于这些平面内。相对于选定的参考正交坐标系，定义对称配置方位的自旋轴矩阵 H_s 与测量阵矩阵 H 为

$$H_s^T = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-24)$$

$$H^T = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 & -\sqrt{3}-1 & -\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 & -\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 \\ -\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 & -\sqrt{3}-1 & -\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (8-25)$$

对称配置系统的编排和测量结果列于8—1表。

测量方程为

$$\xi + \omega H = m \quad (8-26)$$

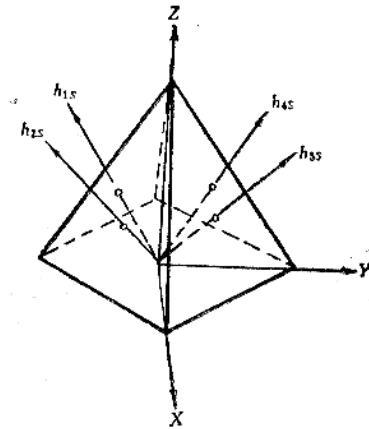


图8—5 对称配置系统

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= [m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8]^T \\ \boldsymbol{\omega} &= [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T \\ E\{\xi\} &= 0; \quad E\{\xi \xi^T\} = \sigma^2 I \end{aligned}$$

此处, I 是 8×8 单位矩阵。

表8—1 对称配置系统的编排

陀螺	测量轴方向	测量结果
1	h_{11} h_{12}	m_1 m_2
2	h_{21} h_{22}	m_3 m_4
3	h_{31} h_{32}	m_5 m_6
4	h_{41} h_{42}	m_7 m_8

2. 正交配置

四个自旋轴中的三个相互正交。一种典型布局是, 第四个自旋轴位于由三个正交自旋轴中的二个所确定的平面内。四个自旋轴与八个测量轴方位如图8—6所示。相对于选定的

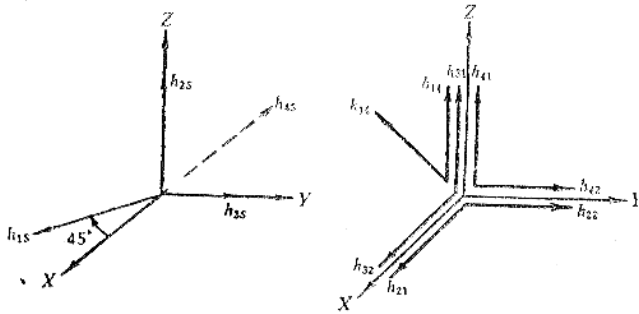


图8—6 正交配置系统

参考正交坐标系, 定义正交配置方位的自旋轴矩阵 \mathbf{H}_S 与测量轴矩阵 \mathbf{H} 为

$$\mathbf{H}_S^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-27)$$

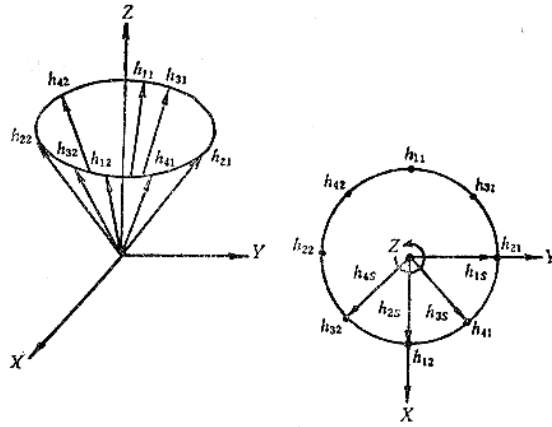
$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-28)$$

正交配置系统的测量方程式可参照(8—26)式写出。

3. 共面配置

四个自旋轴位于一个平面内。其典型结构是八个测量轴对称地分布在一个顶角为90°的圆锥面上。四个自旋轴与八个测量轴的方位如图8—7所示。相对于选定的参考正交坐标系，定义共面配置方位的自旋轴矩阵 H_s 与测量轴矩阵 H 为

$$H_s^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-29)$$



8—7 共面配置系统

$$H^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (8-30)$$

共面配置系统的测量方程式亦可参照(8—26)式求得。

在上述任一种配置中，只要有二个陀螺是正常的，即可提供全部姿态测量信息。三种系统均可以识别二个故障陀螺，检测三个故障陀螺。它们各有不同的使用场合。例如，对称配置具有最佳的导航性能，而在主要是绕某一个飞行器轴感测角速率的情况下，最好选用共面配置，因为它可以使沿这个轴向的估值误差方差最小。关于这个问题，在后面“余度系统导航性能计算”一节中还要详细讨论。

有五个双轴惯性仪表的正交配置模型如图8—8所示。

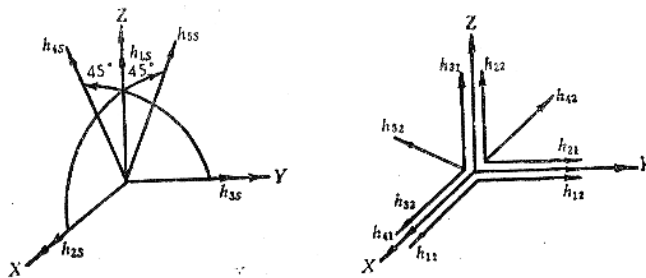


图8—8 五陀螺仪正交配置系统

相对于选定的参考正交坐标系，定义五个陀螺仪正交配置方位的自旋轴矩阵 H_s 与测量轴矩阵 H 为

$$\mathbf{H}_5^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (8-31)$$

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (8-32)$$

五陀螺仪系统的编排和测量结果列于表 8—2。

测量方程为

$$\mathbf{m} = \mathbf{H}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\xi} \quad (8-33)$$

式中

$$\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}]^T$$

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$$

$$E\{\boldsymbol{\xi}\} = \mathbf{0}; \quad E\{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^T\} = \sigma^2 \mathbf{I}$$

此处, \mathbf{I} 是 10×10 单位矩阵。

表 8—2 五陀螺仪系统的编排

陀螺	测量轴方向	测量结果
1	h_{11} , x 方向 h_{12} , y 方向	$m_1 = \omega_x$ $m_2 = \omega_y$
2	h_{21} , y 方向 h_{22} , z 方向	$m_3 = \omega_y$ $m_4 = \omega_z$
3	h_{31} , z 方向 h_{32} , x 方向	$m_5 = \omega_z$ $m_6 = \omega_x$
4	h_{41} , x 方向 h_{42} , y = z 方向	$m_7 = \omega_x$ $m_8 = (1/\sqrt{2})\omega_y + (1/\sqrt{2})\omega_z$
5	h_{51} , y 方向 h_{52} , z = x 方向	$m_9 = \omega_y$ $m_{10} = (1/\sqrt{2})\omega_z + (1/\sqrt{2})\omega_x$

有六个双轴惯性仪表的正交配置模型如图 8—9 所示。

相对于选定的参考正交坐标系, 定义六个陀螺仪正交配置方位的自旋轴矩阵 \mathbf{H}_5 与测量轴矩阵 \mathbf{H} 为

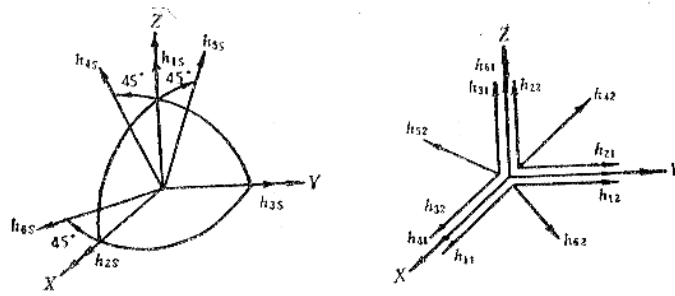


图8-9 六陀螺仪正交配置系统

$$H_S^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \quad (8-34)$$

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-35)$$

六陀螺仪系统的编排和测量结果列于表 8-3。

表8-3 六陀螺仪系统的编排

陀螺	测量轴方向	测量结果
1	h_{11} , x 方向	$m_1 = \omega_x$
	h_{12} , y 方向	$m_2 = \omega_y$
2	h_{21} , y 方向	$m_3 = \omega_y$
	h_{22} , z 方向	$m_4 = \omega_z$
3	h_{31} , z 方向	$m_5 = \omega_z$
	h_{32} , x 方向	$m_6 = \omega_x$
4	h_{41} , x 方向	$m_7 = \omega_x$
	h_{42} , y = z 方向	$m_8 = (1/\sqrt{2})\omega_y + (1/\sqrt{2})\omega_z$
5	h_{51} , y 方向	$m_9 = \omega_y$
	h_{52} , z = x 方向	$m_{10} = (1/\sqrt{2})\omega_z + (1/\sqrt{2})\omega_x$
6	h_{61} , z 方向	$m_{11} = \omega_z$
	h_{62} , x = y 方向	$m_{12} = (1/\sqrt{2})\omega_x + (1/\sqrt{2})\omega_y$

测量方程为

$$\mathbf{m} = \mathbf{H}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\xi} \quad (8-36)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= [m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}]^T \\ \boldsymbol{\omega} &= [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T \\ E\{\boldsymbol{\xi}\} &= 0; \quad E\{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^T\} = \sigma^2 I \end{aligned}$$

此处, I 是 12×12 单位矩阵。

上述两种余度系统, 任何两个好的陀螺仪都能提供全部姿态信息。一般说来, 余度惯性仪表最佳配置的准则是, 提高系统的可靠性和减小导航误差, 在故障检测及识别机构的设计中, 尚应考虑故障检测与隔离的能力。

§ 8—2 余度惯性仪表配置的评价

一、余度系统的可靠性

1. 系统和仪表的可靠性

可靠性定义为系统、元件等在规定的条件下和预定的时间内正常工作的概率。可以认为惯性仪表发生故障的次数为一随机变量, 而且单位时间内发生的故障次数很小, 同时在一段时间间隔 t 内发生的故障次数在一个有限的平均值附近摆动。这时, 在时间间隔 t 中恰好发生 x 次故障的概率可近似用泊松分布表示

$$P(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \quad (8-37)$$

式中 λ ——单位时间内发生故障的次数, 即故障率;

λt ——时间 t 内发生的平均故障次数。

假设 $x=0$, 则有

$$P(0) = e^{-\lambda t} \quad (8-38)$$

它表示在时间 t 内一次故障也未发生的概率。通常称为系统或元件的可靠性函数

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad (8-39)$$

方程式 (8-39) 表明可靠性是单调下降的时间函数。系统或元件的平均故障间隔时间 MTBF 为

$$\text{MTBF} = \int_0^{\infty} R(t) dt = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} d(-\lambda t) = \frac{1}{\lambda} \quad (8-40)$$

在平台式惯导系统中, 如假定三个单自由度陀螺仪发生故障的事件是独立的, 系统的其他部件都是理想的, 系统的可靠性 $R(t)$ 将由三个惯性仪表可靠性函数的乘积来确定

$$R(t) = e^{-3\lambda t} \quad (8-41)$$

由此可以算出, 要想在一年内使系统的可靠性达到 0.95, 则一个仪表的 MTBF 应为 59 年。在平台式惯导系统中, 为了提高可靠性, 使用了包括平台及导航计算机在内的三套系统, 通过对系统的输出进行加权平均, 按表决方式实现故障的检测与隔离。这样做, 使体积、重量和成本都很大。捷联式惯导系统, 针对可靠性较差的元部件, 采用余度容错编排, 可用较低

的代价明显提高整个系统的可靠性。

2. 余度系统可靠性计算

在有同一可靠性 R_e 的 n 个惯性仪表配置中, 容许任意 m 个 ($n > m$) 发生故障时, 系统可靠性 R_a 为

$$R_a = R_e^n + C_n^{n-1} R_e^{n-1} (1-R_e) + \dots + C_n^{n-m} R_e^{n-m} (1-R_e)^m \quad (8-42)$$

要使由单自由度陀螺组成的余度系统正常工作, 至少需要三个仪表。此时, 系统可靠性为

$$R_a' = R_e^3 + C_3^2 R_e^2 (1-R_e) + \dots + C_3^1 R_e (1-R_e)^2 \quad (8-43)$$

显然, 三个陀螺仪的测量轴不共面, 而且也不能有两个仪表的测量轴共线。这就要求测量矩阵 \mathbf{H} 中, 任意三行构成的 3×3 阶矩阵是非奇异的。要使由双自由度陀螺组成的余度系统正常工作, 至少需要二个仪表。此时, 系统可靠性为

$$R_a = R_e^2 + C_2^1 R_e (1-R_e) + \dots + C_2^0 (1-R_e)^2 \quad (8-44)$$

测量矩阵 \mathbf{H} 中, 由任意二个仪表构成的 4×3 阶矩阵, 至少有一个 3×3 阶矩阵是非奇异的。可以看出, 如假定每个单独的单自由度陀螺的可靠性 R_e 和每个双自由度陀螺的可靠性完全一样, 双自由度陀螺余度系统的可靠性较高。

按公式 (8-43) 与 (8-44) 可以分析和计算各种余度配置方案的可靠性。以非正交配置四个单轴惯性仪表系统为例, 在下列情况下, 系统均能正常工作:

- (1) 所有四个仪表都正常工作;
- (2) 任意三个仪表的组合可正常工作。

全部四个仪表均正常工作的概率 (独立事件的交集) 为

$$P(4 \text{ 个工作}) = R_e^4 = e^{-4\lambda t} \quad (8-45)$$

任意三个的组合可正常工作的概率由下式给出

$$P(3 \text{ 个工作}) = 4R_e^3(1-R_e) = 4e^{-3\lambda t}(1-e^{-\lambda t}) \quad (8-46)$$

四陀螺仪系统的可靠性由方程式 (8-45) 和 (8-46) 之和确定 (互斥事件的并集)

$$R_a = 4e^{-3\lambda t} - 3e^{-4\lambda t} \quad (8-47)$$

单个陀螺仪的 MTBF 是 $1/\lambda$ 。三个仪表沿参考正交坐标系轴安装的无余度系统的 MTBF 是 $1/3\lambda$, 四陀螺仪系统的 MTBF 按下式计算

$$\text{MTBF} = \frac{4}{3\lambda} - \frac{3}{4\lambda} = \frac{7}{12\lambda} \quad (8-48)$$

这表明, 四陀螺仪系统的平均故障间隔时间是无余度系统的 1.75 倍。用类似的方法可以计算其它单轴仪表余度系统和双轴仪表余度系统的可靠性, 结果分别列在表 8-4 与表 8-5 中。

表8—4 单轴惯性仪表余度系统可靠性

配置方案	可靠性 R'_a	MTBF	比值
三轴正交配置	$e^{-3\lambda t}$	$\frac{1}{3\lambda}$	1
四陀螺仪系统	$4e^{-3\lambda t} - 3e^{-4\lambda t}$	$\frac{7}{12\lambda}$	1.75
五陀螺仪系统	$6e^{-5\lambda t} - 15e^{-4\lambda t} + 10e^{-3\lambda t}$	$\frac{47}{60\lambda}$	2.35
六陀螺仪系统	$e^{-3\lambda t}(20 - 10e^{-3\lambda t} + 36e^{-2\lambda t} - 45e^{-\lambda t})$	$\frac{57}{60\lambda}$	2.86

表8—5 双轴惯性仪表余度系统可靠性

配置方案	可靠性 R_a	MTBF	比值
两陀螺仪系统	$e^{-2\lambda t}$	$\frac{1}{2\lambda}$	1
三陀螺仪系统	$3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}$	$\frac{5}{6\lambda}$	1.66
四陀螺仪系统	$3e^{-4\lambda t} - 8e^{-3\lambda t} + 6e^{-2\lambda t}$	$\frac{13}{12\lambda}$	2.16
五陀螺仪系统	$-4e^{-5\lambda t} + 15e^{-4\lambda t} - 20e^{-3\lambda t} + 10e^{-2\lambda t}$	$\frac{77}{60\lambda}$	2.57
六陀螺仪系统	$5e^{-6\lambda t} - 24e^{-5\lambda t} + 45e^{-4\lambda t} - 40e^{-3\lambda t} + 15e^{-2\lambda t}$	$\frac{87}{60\lambda}$	2.90

可靠性 R_a , R'_a 与归一化时间 $T = \lambda t$ 的函数曲线如图 8—10 所示。很明显二自由度陀螺捷联式系统的可靠性较高。应当指出, 图形是在假定任何故障元件均可被检测与隔离的情形下绘制的。

二、数据处理与单轴余度惯性仪表配置角的最佳值

1. 数据处理

采用余度惯性仪表, 除了提高系统的可靠性外, 还能提供重复的测量值, 借助于数据处理技术, 可用这种重复测量来减少与单个惯性仪表相关的误差影响。如前所述, 余度系统的测量方程式是一个含有随机误差的代数方程式, 其一般形式为

$$m = HX + \xi \quad (8-49)$$

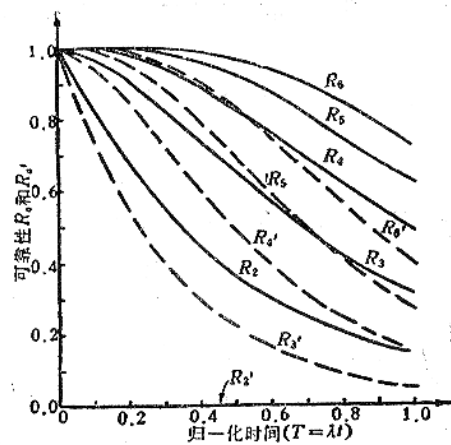


图8—10 系统的可靠性

式中 \mathbf{m} 是仪表测量值的 n 维测量矢量, \mathbf{H} 是 $n \times 3$ 测量矩阵, 它的行组成仪表测量轴相对于飞行器参考轴的方向余弦, \mathbf{X} 是三维状态矢量 (惯性角速率或加速度), ξ 是 n 维测量误差矢量。假定 ξ 的统计特性为

$$E\{\xi\} = 0, E\{\xi \xi^T\} = \sigma^2 I_n \quad (8-50)$$

式中 I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵。

对于双轴惯性仪表, 假定测量噪声是不相关的, 可能并不符合实际。这样做的目的是使对于某个选定的仪表配置的分析在数学上不致过分复杂, 而且以后的讨论表明, 利用这种假设可以直观地得到比较不同双轴惯性仪表配置的满意结果。

在对随机测量误差的统计特性不完全了解的情况下, 常用的数据处理方法是最小二乘估计, 或加权的最小二乘估计。如果要求选择 \mathbf{X} 的一个估计 $\hat{\mathbf{X}}$, 使得下列二次型性能指标

$$J(\hat{\mathbf{X}}) = (\mathbf{m} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}})^T (\mathbf{m} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}) \quad (8-51)$$

或更一般形式的二次型性能指标

$$J_W(\hat{\mathbf{X}}) = (\mathbf{m} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}})^T \mathbf{W} (\mathbf{m} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}) \quad (8-52)$$

达到极小, 那末就称这个估计 $\hat{\mathbf{X}}$ 为 \mathbf{X} 的最小二乘估计或加权最小二乘估计, 并记为 $\hat{\mathbf{X}}_{LS}(\mathbf{m})$ 或 $\hat{\mathbf{X}}_{LSW}(\mathbf{m})$ 。其中 \mathbf{W} 是 $n \times n$ 对称正定加权矩阵。由于 $J(\hat{\mathbf{X}})$ 或 $J_W(\hat{\mathbf{X}})$ 是一个标量函数, 并且上述最小二乘估计只是一个确定性的求极小值问题。因此, 可通过使 $J(\hat{\mathbf{X}})$ 或 $J_W(\hat{\mathbf{X}})$ 对 $\hat{\mathbf{X}}$ 的梯度等于零的方法来求 $\hat{\mathbf{X}}_{LS}(\mathbf{m})$ 或 $\hat{\mathbf{X}}_{LSW}(\mathbf{m})$ 。

由矢量函数对矢量变量求导的规则和 (8-51), (8-52) 得

$$\frac{\partial J(\hat{\mathbf{X}})}{\partial \hat{\mathbf{X}}} = -2\mathbf{H}^T (\mathbf{m} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}) \quad (8-53)$$

或

$$\frac{\partial J_W(\hat{\mathbf{X}})}{\partial \hat{\mathbf{X}}} = -2\mathbf{H}^T \mathbf{W} (\mathbf{m} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}) \quad (8-54)$$

令上式等于零, 则当 $(\mathbf{H}^T \mathbf{H})$ 或 $(\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})$ 为非奇异阵时可得

$$\hat{\mathbf{X}}_{LS}(\mathbf{m}) = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{m} \quad (8-55)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{LSW}(\mathbf{m}) = (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{m} \quad (8-56)$$

显然, $\hat{\mathbf{X}}_{LS}(\mathbf{m})$ 或 $\hat{\mathbf{X}}_{LSW}(\mathbf{m})$ 是测量数据 \mathbf{m} 的线性函数, 故这种估计是线性估计。另外, 求 $\hat{\mathbf{X}}_{LS}(\mathbf{m})$ 及 $\hat{\mathbf{X}}_{LSW}(\mathbf{m})$ 时并不一定要求测量误差 ξ 的平均值为零, 但是, 当其平均值为零时, 由于

$$E\{\hat{\mathbf{X}}_{LS}(\mathbf{m})\} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T E\{\mathbf{m}\} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{H}^T \mathbf{H}) E\{\mathbf{X}\} = \mathbf{X}$$

或

$$E\{\hat{\mathbf{X}}_{LSW}(\mathbf{m})\} = (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} E\{\mathbf{m}\} = (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H}) E\{\mathbf{X}\} = \mathbf{X}$$

因此, $\hat{\mathbf{X}}_{LS}(\mathbf{m})$ 或 $\hat{\mathbf{X}}_{LSW}(\mathbf{m})$ 是 \mathbf{X} 的一种无偏估计量。

取

$$\tilde{\mathbf{X}}_{LS} = \mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{LS}$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_{LSW} = \mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{LSW}$$

为估计误差, 估计误差的方差阵为

$$\begin{aligned} V_{\tilde{\mathbf{X}}_{LS}} &= E\{[\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{LS}(\mathbf{m})][\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{LS}(\mathbf{m})]^T\} \\ &= E\{(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \xi \xi^T \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}\} \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R} \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \end{aligned} \quad (8-57)$$

或

$$\begin{aligned} V_{ar}\{\tilde{\mathbf{X}}_{LSW}\} &= E\{[\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{LSW}(\mathbf{m})][\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{LSW}(\mathbf{m})]^T\} \\ &= E\{(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{W}\xi\xi^T\mathbf{W}\mathbf{H}(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}\} \\ &= (\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{R}\mathbf{W}\mathbf{H}(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H})^{-1} \end{aligned} \quad (8-58)$$

式中 $\mathbf{R} = V_{ar}\{\xi\} = E\{\xi\xi^T\}$ 。在计算上两式的过程中考虑到了 $E\{\xi\} = 0$ 。

如 $\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1}$ 时, 由 (8-58) 可得加权最小二乘估计的方差阵为

$$V_{ar}\{\tilde{\mathbf{X}}_{LSR^{-1}}\} = (\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})^{-1} = (\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})^{-1} \quad (8-59)$$

可以证明, 当选择加权矩阵 $\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1}$ 时, 能使加权最小二乘估计的方差阵达到最小。

当取 $\mathbf{R} = \sigma^2\mathbf{I}_n$ 时, 可得

$$V_{ar}\{\tilde{\mathbf{X}}_{LS}\} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\sigma^2 \quad (8-60)$$

$$V_{ar}\{\tilde{\mathbf{X}}_{LSR^{-1}}\} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\sigma^2 \quad (8-61)$$

由此可见, 估计误差是测量矩阵 \mathbf{H} 和测量噪声方差 σ^2 的函数。在选择余度惯性仪表配置模型时, 从提高导航性能考虑, 应使估计误差减至最小。

由方程式 (8-55), 如所有陀螺仪都正常工作, 满足最小二乘方误差判据的最佳值 $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 由下式给出

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{m} \quad (8-62)$$

它就是希望的数据处理方程式, 可方便地写入计算机程序内。如工作过程中, 故障检测与识别机构识别出某个仪表失效, 则上式测量矩阵 \mathbf{H} 及测量矢量 \mathbf{m} 中包含该仪表的行应置零。这样, 在数据处理中, 失效仪表即被删除。对于容许的几个仪表故障, 都能得到一个符合最小二乘方误差准则的惯性角速率估值。因为余度惯性仪表的重新组合不需要修改硬设备, 而是通过软件控制来实现的, 所以对不同的仪表故障, 可仿照前述方法容易地把它们编成不同的标号写入数据处理程序。通常, 取

$$\mathbf{M} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T \quad (8-63)$$

称其为变换矩阵, 其各元素是 $M_{ij} (i=1\sim 3, j=1\sim V, V$ 是敏感元件的个数)。当有一个仪表发生故障时,

$$\mathbf{M}_l = (\mathbf{H}_l^T\mathbf{H}_l)^{-1}\mathbf{H}_l^T \quad (8-64)$$

式中 l 为故障仪表编号 ($l=1\sim V$), \mathbf{H}_l 表示测量矩阵 \mathbf{H} 中与该仪表相关的行已置零。在两个仪表 $l, m (l, m=1\sim V, l\neq m)$ 和三个代表 $l, m, n (l, m, n=1\sim V, l\neq m, m\neq n, n\neq l)$ 出故障时,

$$\mathbf{M}_{lm} = (\mathbf{H}_{lm}^T\mathbf{H}_{lm})^{-1}\mathbf{H}_{lm}^T \quad (8-65)$$

$$\mathbf{M}_{lmn} = (\mathbf{H}_{lmn}^T\mathbf{H}_{lmn})^{-1}\mathbf{H}_{lmn}^T \quad (8-66)$$

将用于仪表输出的变换。

2. 单轴惯性仪表最佳配置角的选择

为了选出余度惯性仪表配置角 α 的最佳值, 应先建立评价函数。以陀螺仪为例, 可利用仪表误差 $\xi_j (j=1\sim V)$ 对沿参考正交系轴的角速度估值的影响程度来评价。由 (8-49) 及 (8-62) 式得到

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}\xi \quad (8-67)$$

各陀螺仪的测量误差 ξ_i 是独立的。它对沿参考正交系轴的角速度估值的影响程度 E_x 、 E_y 、 E_z ，是 ξ_i 乘以 \mathbf{M} 的元素 M_{ij} ($i=1\sim 3, j=1\sim V$) 各项的 RSS 值。无故障时 E_x 、 E_y 、 E_z 分别为

$$\begin{aligned} E_x &= \sqrt{\sum_{j=1}^V M_{1j}^2 \xi_j^2} \\ E_y &= \sqrt{\sum_{j=1}^V M_{2j}^2 \xi_j^2} \\ E_z &= \sqrt{\sum_{j=1}^V M_{3j}^2 \xi_j^2} \end{aligned} \quad (8-68)$$

此处的 V 在四陀螺仪、五陀螺仪、六陀螺仪的各系统中分别为 4、5、6。仪表误差可取为校正后的不规则变动分量的标准差，并按

$$\xi_j (j=1\sim V) = 1.0 \text{ (度/小时)} \quad (8-69)$$

建立评价函数。(8-68) 式是无故障时的方程式。如果将其取为 $E_x(0)$ 、 $E_y(0)$ 、 $E_z(0)$ ，用其 RSS 值来定义误差的评价量 $E_T(0)$ ，则由 (8-68) 与 (8-69) 式，得到

$$\begin{aligned} E_T(0) &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \\ &= \sqrt{E_x(0)^2 + E_y(0)^2 + E_z(0)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^V M_{ij}^2} \end{aligned} \quad (8-70)$$

这表明， $E_T(0)$ 是变换矩阵各元素的 RSS 值，在仪表出故障时，其分析也可同样进行。在四陀螺仪系统中，仪表 l 出故障时的误差评价式为

$$E_T(l) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 M_{ij}(l)^2} \quad (8-71)$$

式中 $M_{ij}(l)$ 为 \mathbf{M}_l 的 ij 元素。对于五陀螺仪系统、六陀螺仪系统，当二个仪表 l 、 m 或三个仪表 l 、 m 、 n 出故障时的评价式 $E_T(l, m)$ 、 $E_T(l, m, n)$ 也是变换矩阵 \mathbf{M}_{lm} 、 \mathbf{M}_{lmn} 的各元素的 RSS 值。求出 E_T 即可知道无故障时或一、二、三个仪表出故障时，仪表误差对系统产生多大程度的影响。由于不同的仪表出故障时其影响程度将有所差异，因此，把各个系统发生故障时 $E_T(l)$ 、 $E_T(l, m)$ 、 $E_T(l, m, n)$ 的 RMS 误差 E_R 作为评价函数。令使 E_R 最小的 α 为最佳配置角。在四陀螺仪系统中若令无故障时，一个仪表出故障时的 E_R 分别为 $E_R(4, 0)$ 、 $E_R(4, 1)$ 则得

$$E_R(4, 0) = E_T(0) \quad (8-72)$$

$$E_R(4, 1) = \sqrt{\sum_{l=1}^4 E_T(l)^2 / 4} \quad (8-73)$$

由 (8-3)、(8-7) 及 (8-63) 式可见，各 M_{ij} 为 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 或常数项，而且根据 (8-70)~(8-73)， E_R 可用 M_{ij} 的平方来表示。因此，各 E_R 可视为 $\sin^2 \alpha$ 的函数，在求最佳配置角时，取

$$u = \sin^2 \alpha \quad (8-74)$$

由 (8-63)、(8-64)、(8-70)~(8-74) 诸式可知，对四陀螺仪系统 No. 1

$$E_R(4, 0) = \sqrt{\frac{5}{2}} \quad (8-75)$$

$$E_R(4, 1) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(3 + \frac{4}{u} + \frac{1}{1-u} \right)} \quad (8-76)$$

求出使 E_R 为最小的 u 为

$$\hat{u} = \sin^2 \hat{\alpha} = \frac{2}{3} \quad (8-77)$$

下面用同样的步骤求四陀螺仪系统 No.2 的 E_R 和 \hat{u} 。其式为

$$E_R(4, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4-3u}{u(1-u)}} \quad (8-78)$$

$$E_R(4, 1) = \sqrt{\frac{4-3u}{2u(1-u)}} \quad (8-79)$$

$$\hat{u} = \sin^2 \hat{\alpha} = \frac{2}{3} \quad (8-80)$$

五陀螺仪系统无故障时和一、二个仪表出故障时的 E_R 分别取为 $E_R(5, 0)$ 、 $E_R(5, 1)$ 、 $E_R(5, 2)$ 。和四陀螺仪系统情况相似，这些 E_R 也可作为 α 的函数求出，但由于在五陀螺仪系统中尚包含有 β 角，因此，把有故障时的 E_R 以 α 的函数形式表示出来就比较困难。从制造观点来看， β 一般是取 72° 。这样，首先要算出 α 从 $0^\circ \sim 90^\circ$ 时的 E_R ，预测使 E_R 为最小值的 α 。这一计算结果如图 8-11 所示。从图中看出，使 $E_R(5, 0)$ 最小的 α 和使 $E_R(5, 1)$ 、 $E_R(5, 2)$ 最小的 α 是一致的。而 $E_R(5, 0)$ 为

$$E_R(5, 0) = E_T(0) = \sqrt{\frac{4-3u}{5u(1-u)}} \quad (8-81)$$

$$\hat{u} \text{ 为 } \hat{u} = \sin^2 \hat{\alpha} = \frac{2}{3} \quad (8-82)$$

对于五陀螺仪系统，可将此 $\hat{\alpha}$ 作为 α 的最佳值。

六陀螺仪系统最多容许三个仪表出故障，故 E_R 有 $E_R(6, 0)$ 、 $E_R(6, 1)$ 、 $E_R(6, 2)$ 、 $E_R(6, 3)$ 。如果将其用 u 的函数表示，则得

$$E_R(6, 0) = E_T(0) = \frac{3}{2} \quad (8-83)$$

$$E_R(6, 1) = \sqrt{\sum_{l=1}^6 E_T(l)^2 / 6} = \sqrt{2} \quad (8-84)$$

$$\begin{aligned} E_R(6, 2) &= \sqrt{\sum_{l, m=1}^6 E_T(l, m)^2 / 15} \quad (l \neq m) \\ &= \sqrt{\frac{1}{5} \left\{ \frac{1+u-u^2}{2u(1-u)} + \frac{2(5-u+u^2)}{1-u+u^2} \right\}} \quad (8-85) \end{aligned}$$

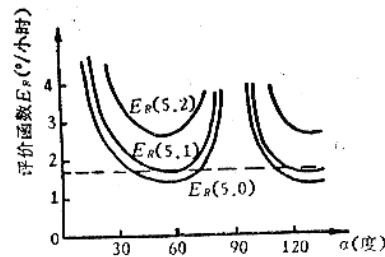


图8-11 E_R 曲线(正陀螺仪系统)

$$E_R(6, 3) = \sqrt{\sum_{l, m, n=1}^6 E_T(l, m, n)^2 / 20 \begin{pmatrix} l \neq m \\ m \neq n \\ n \neq l \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{20} \left\{ \frac{3(1+u-u^2)}{u^2(1-u^2)} + \frac{24(1-3u+3u^2)}{(2u-1)^2(u^2-u+1)} \right\}} \quad (8-86)$$

由(8-85)及(8-86)式求出使 E_R 为最小的 \hat{u} 为

$$\hat{u} = \sin^2 \hat{\alpha} = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \quad (8-87)$$

六陀螺仪系统的最佳配置是仪表测量轴和正十二面体的各个平行面相互垂直。

在正交配置的三陀螺仪系统中仅无故障时的状态是可使用状态, 故

$$E_R(3, 0) = E_T(0) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \xi_i^2} = \sqrt{3} \quad (8-88)$$

显然, 余度系统无故障时的 E_R 要比常规的三陀螺仪系统的 E_R 小。因此, 余度仪表配置有助于降低由仪表误差所产生的导航误差。

三、余度系统的导航性能

1. 评定导航性能的性能指标

现在选用某个特定的测量误差方差 σ^2 对(8-60)式进行规范化, 得到

$$\mathbf{C} = \frac{V_{ar}\{\tilde{\mathbf{X}}_{LS}\}}{\sigma^2} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \quad (8-89)$$

假定测量误差 ξ 是一个有零均值的 n 维高斯随机矢量, 则估计误差 $\tilde{\mathbf{X}}$ 同样是有零均值的 n 维高斯随机矢量, 其概率密度函数为

$$P_{\tilde{\mathbf{X}}}(\boldsymbol{\eta}) = (2\pi)^{-n/2} |\mathbf{C}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\eta}\right\} \quad (8-90)$$

点 $\boldsymbol{\eta}$ 的轨迹由下式定义

$$\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\eta} = K \quad (8-91)$$

它代表一个有常值概率密度表面的误差椭球。对于任选的 K 值, 此椭球的体积由下式给出

$$V = 4/3 K^{3/2} \pi \sqrt{|\mathbf{C}|} \quad (8-92)$$

从上式看出, $\sqrt{|\mathbf{C}|}$ 正比于误差椭球的体积。因为误差椭球的体积越小, 则估计误差也将越小。由此, $\sqrt{|\mathbf{C}|}$ 可作为评定导航性能的一个性能指标, 用 F_p 表示。利用方程式(8-89), 它可写成

$$F_p = \sqrt{|\mathbf{C}|} = \sqrt{|(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}|} \quad (8-93)$$

对于一组 n 个测量值, 所感兴趣的是使 F_p 取最小值。因为它是 n 个仪表配置中所能达到的最佳导航性能。取 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为矩阵 $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ 的特征值。方程式(8-93)可写成

$$F_p = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-1/2} \quad (8-94)$$

因为 \mathbf{H} 的 n 行是 n 个测量轴的方向余弦, 由此得到

$$\text{Tr}(\mathbf{H}^T \mathbf{H}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = n \quad (8-95)$$

在满足(8-95)式的条件下, 当

$$\lambda_i = n/3, \quad (\text{对于所有的 } i) \quad (8-96)$$

方程式(8—94)将取得最小值。由此,对于一组 n 个测量值, F_p 的最小值为

$$F_{p\min} = \sqrt{(3/n)^3} \quad (8—97)$$

一般说来, F_p 取决于 \mathbf{H} 这个事实意味着,一个选定的仪表配置所能达到的导航性能与各仪表测量轴的方位有关。对于双轴仪表配置可得到更基本的结果。下面将要阐明,双轴仪表配置的导航性能仅取决于其自旋轴的相对方位而与其测量轴的方位无关。

假定有 N 个双自由度陀螺配置,它能提供 $n=2N$ 个测量值,取 \mathbf{H}_s 为 N 个陀螺仪自旋轴的 $N \times 3$ 几何矩阵。由此,

$$\mathbf{H}_s^T = [h_{1s}, h_{2s}, \dots, h_{Ns}] \quad (8—98)$$

式中 h_{is} 是第 i 个陀螺自旋轴方向的单位矢量。与此对应的测量轴几何矩阵为

$$\mathbf{H}^T = [h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}, \dots, h_{N1}, h_{N2}] \quad (8—99)$$

式中 h_{i1} 和 h_{i2} 是第 i 个陀螺的两个测量轴方向的单位矢量。于是

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \sum_i \sum_j h_{ij} h_{ij}^T, \quad i=1, 2, \dots, N; \quad j=1, 2 \quad (8—100)$$

对于任何双自由度陀螺仪, 3×3 矩阵

$$[h_{i1}, h_{i2}, h_{is}], \quad i=1, 2, \dots, N$$

是正交的,因此

$$h_{is} h_{is}^T + h_{i1} h_{i1}^T + h_{i2} h_{i2}^T = I, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (8—101)$$

将其代入(8—100)式得到

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \sum_{i=1}^N (I - h_{is} h_{is}^T)$$

或

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = N I - \mathbf{H}_s^T \mathbf{H}_s \quad (8—102)$$

方程式(8—102)表明:

(1) 增加双自由度陀螺的数目 N ,可以减小 F_p ,从而能改善导航性能;

(2) 若 N 个双自由度陀螺仪有两种配置模型,其自旋轴矩阵分别为 \mathbf{H}_s 和 \mathbf{H}'_s 。如

$\mathbf{H}_s^T \mathbf{H}_s = \mathbf{H}'_s{}^T \mathbf{H}'_s$,则将产生同样的性能指标 F_p ,从而有相同的导航性能。显然,对于任何双自由度陀螺配置,可达到的导航性能仅是自旋轴方位的函数。这个结果为选择余度双自由度陀螺的自旋轴方位,以达到希望的导航性能,提供了正确的依据。其后,可借旋转仪表测量轴以改善其它设计参数,例如仪表故障的检测能力。

迄今,我们的分析仅限于仪表的相对方位对导航性能的影响。下面将考察余度仪表配置中能产生最小估值误差的方向。在空间飞行器或导弹的应用中,飞行器的轨迹在执行任务之前是计划好的,而在任务进行过程中是被控制的。通常,系统的性能对沿某个特定飞行器轴的测量误差特别敏感。在这种情况下,自然希望把余度仪表配置成,使产生最小估值误差的方向与飞行器的那个轴相重合。这样,对于余度仪表配置便确定了一个优选的方位。

为了找出估值误差方差的极值和达到这个误差方差的方向,取 \mathbf{u} 为一单位矢量, σ_u^2 为沿 \mathbf{u} 的估值误差方差。于是 σ_u^2 由下式确定

$$\sigma_u^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u} \quad (8—103)$$

式中 \mathbf{C} 由(8—89)式给出。方程式(8—103)的系数受条件 $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = I$ 的约束,它们是矩阵 \mathbf{C} 的

特征值，与这些系数相关的 \mathbf{u} 的列向量是 \mathbf{C} 的特征矢量。由此，这些特征值和特征矢量便决定了仪表配置中的优选方位。

2. 余度系统导航性能计算

按公式 (8—93) 算出表征上述各种余度系统导航性能的性能指标 F_p 。所得结果列于表 8—6 中。因为 F_p 正比于与估值误差方差阵有关的误差椭球的体积，所以 F_p 越小，则表示求出的惯性角速率估值误差越小，从而有更好的导航性能。显然，对于各种配置模型，在仪表的数目相同时，单轴惯性仪表测量轴的对称配置和双轴惯性仪表自旋轴的对称配置产生最佳的导航性能。事实上，正如 (8—97) 式所指出的，对于任何六个单自由度陀螺配置和四个双自由度陀螺配置，这是可能达到的最佳性能。可以看出，在四个双轴仪表配置中，随着自旋轴丧失其对称性，导航性能将逐渐降低，在共面配置中其性能最差。此外，若仪表数目相同，采用双轴仪表的余度系统，除前面提到的系统可靠性提高外，其导航性能亦优于单轴余度系统。这从概念上也是显而易见的，因为一个双轴仪表实际上具有两个单轴仪表的功能，它能提供更多的测量信息，经过数据处理后，其对被测量的估计误差自然会减小。

表 8—6 评价导航性能的性能指标

陀螺仪类型	配置方式	性能指标 F_p
单轴惯性仪表	四陀螺仪系统 No.1	0.7071
	四陀螺仪系统 No.2	0.6497
	五陀螺仪系统	0.4647
	六陀螺仪系统	0.3536
双轴惯性仪表	四陀螺仪对称配置	0.229
	四陀螺仪正交配置	0.236
	四陀螺仪共面配置	0.250
	五陀螺仪正交配置	0.165
	六陀螺仪正交配置	0.128

按照 (8—103) 式，表 8—7 列出了四个双自由度陀螺仪系统的方差 σ_i^2 以及对应的相互正交的单位矢量 $\mathbf{u}_i (i=1, 2, 3)$ 。沿这些矢量，估计误差达到指出的方差。矢量 \mathbf{u}_i 是在定义每个仪表配置方位的坐标系中表示的。因为与对称配置相对应的误差椭球是一个圆球，所以它的估值误差沿所有方向都有相同的方差。对于另外两种配置模型，每种都有一个特定的轴，沿这个方向的估值误差具有最小的方差。显然，在各个方向都要求有相同估值误差的情况下，最好采用对称配置。如果在使用中，预先已经知道，需要感测的惯性角速率大多是沿着飞行器的某个特定的轴，则采用共面配置更为有利。这种情况下，陀螺仪在飞行器上应配置成，使经常承受角速率的那个飞行器轴沿着 \mathbf{u}_i 方向。

表8—7 四个双自由度陀螺系统的优选方位

自旋轴配置	σ_x^2	u_i
对 称	3/8	所 有 方 向
正 交	1/3	$u_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$
	1/3	$u_2 = (0, 0, 1)$
	1/2	$u_3 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$
共 面	1/4	$u_1 = (0, 0, 1)$
	1/2	$u_2 = (0, 1, 0)$
	1/2	$u_3 = (1, 0, 0)$

按(8—60)式可以分析各种余度系统中全部仪表正常工作,有一个或一个以上的仪表发生故障时,系统估值误差的传播特性。计算中应将矩阵 H 中包含故障仪表的行置零,即视故障仪表个数分别取 H_i 、 H_{im} 、 H_{imn} 。当某个仪表出故障时,系统沿参考正交坐标系轴估值误差的统计性能,可以反映出测量数据的简化处理和几何对称性的恶化所带来的影响。这样,与故障轴的几何位置有关,正交系解中沿某个特定轴的偏差可能趋向最大值(即最不利的情况)。类似地,不同的仪表组合可能较其他情况有更大的估值误差。表8—8~表8—10列出了六个单自由度陀螺十二面体配置模型的估计误差传播值。

表8—8 全部仪表正常及一个仪表失效的估值误差

仪 表 组 合	方 差			标 准 差			方 差 和
	x	y	z	x	y	z	
1 2 3 4 5 6	$0.500\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	0.707σ	0.707σ	0.707σ	$1.5\sigma^2$
2 3 4 5 6 1 3 4 5 6	$0.638\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	$0.862\sigma^2$	0.798σ	0.707σ	0.927σ	$2\sigma^2$
1 2 4 5 6 1 2 3 5 6	$0.862\sigma^2$	$0.638\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	0.927σ	0.798σ	0.707σ	
1 2 3 4 6 1 2 3 4 5	$0.500\sigma^2$	$0.862\sigma^2$	$0.638\sigma^2$	0.707σ	0.927σ	0.798σ	

表8—9 二个仪表失效的估值误差

仪 表 组 合				方 差			标 准 差			方差和
I				$0.690\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	$1.807\sigma^2$	0.830σ	0.707σ	1.344σ	$3\sigma^2$
	I			$1.375\sigma^2$	$0.670\sigma^2$	$0.952\sigma^2$	1.172σ	0.818σ	0.975σ	
		II		$1.375\sigma^2$	$0.670\sigma^2$	$0.952\sigma^2$	1.172σ	0.818σ	0.975σ	
			IV	$1.375\sigma^2$	$0.670\sigma^2$	$0.952\sigma^2$	1.172σ	0.818σ	0.975σ	
3456 1256 1234				x y z	y z x	z x y	x y z	y z x	z x y	
	2456 2356 1456 1356			x	y	z	x	y	z	
		2346 1346 2345 1345		z	x	y	z	x	y	
			1246 1245 1236 1235	y	z	x	y	z	x	

表8—10 三个仪表失效的估值误差

仪 表 组 合				方 差			方差和
I				$1.82\sigma^2$	$8.35\sigma^2$	$0.69\sigma^2$	$10.86\sigma^2$
	I			$1.82\sigma^2$	$1.65\sigma^2$	$0.69\sigma^2$	$4.16\sigma^2$
		II		$3.62\sigma^2$	$3.62\sigma^2$	$3.62\sigma^2$	$10.86\sigma^2$
			IV	$1.38\sigma^2$	$1.38\sigma^2$	$1.38\sigma^2$	$4.15\sigma^2$
123, 124 156, 256 345, 346				x z y	y x z	z y x	
	125, 126 356, 456 134, 234			x z y	y x z	z y x	
		136, 145 235, 246		x	y	z	
			135, 146 236, 245	x	y	z	

可以看出,当六个陀螺仪都正常工作时,沿每个正交系轴的标准减小为 0.707σ 。当有三个仪表出故障时,在 20 种不同组合情况中,表 8—10 的第一组对应于由几何对称性的恶化所引的最大误差。例如,若只有陀螺仪 1、2、3 是好的,则正交系解中沿 y 轴的方差将是单个仪表方差的 8.35 倍。与此相比,假设斜置布局中的 α 角取为 45° ,在三个陀螺仪失效情况下,其误差放大可能高达 100 倍。这说明设计陀螺仪布局的几何关系是很重要的。表 8—10 指出,在十二面体配置模型中,估值误差的传播是有界的,随仪表故障数目的增多,其性能并没有明显降低。

表 8—11 将六陀螺十二面体配置捷联姿态系统性能和一个正常的三陀螺正交配置平台系统进行了对比。平台系统中每个正交轴标准差亦为 σ 。可以看到,在一个陀螺仪失效时,六陀螺捷联系统的性能,从统计意义上讲,仍然优于无故障的三陀螺平台系统;即使在二个陀螺失效和三个陀螺失效中的 10 种组合情况下,其性能也基本上与平台系统相同;而当全部陀螺正常工作时,捷联系统的误差将比平台系统降低 30%。

表 8—11 六陀螺捷联系统与三陀螺平台系统的对比

故障仪表数	最不利的参考轴标准差	六陀螺捷联系统与三陀螺平台系统的 RSS 偏差之比
0	0.707σ	0.707
1 (6 种组合)	0.927σ	0.816
2 (15 种组合)	1.344σ	1.000
3 (10 种组合)	1.349σ	1.178
3 (10 种组合)	2.890σ	1.903

用同样的方法可以分析四个双自由度陀螺配置模型的估值误差。其计算结果分别列在表 8—12~表 8—14 中。

表 8—12 对称配置中不同仪表组合的估值误差

仪表组合	方差			性能指标 F_x
	x	y	z	
1234	$0.375\sigma^2$	$0.375\sigma^2$	$0.375\sigma^2$	0.229
123 124 134 234	$0.525\sigma^2$	$0.525\sigma^2$	$0.525\sigma^2$	0.367
43 12	$0.747\sigma^2$	$0.997\sigma^2$	$0.997\sigma^2$	0.748
24 13	$0.997\sigma^2$	$0.997\sigma^2$	$0.747\sigma^2$	
23 14	$0.997\sigma^2$	$0.747\sigma^2$	$0.997\sigma^2$	

表8—13 正交配置中不同仪表组合的估值误差

仪表组合	方 差			性能指标 F_p
	x	y	z	
1 2 3 4	$0.417\sigma^2$	$0.417\sigma^2$	$0.333\sigma^2$	0.236
2 3 4	$0.500\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	0.354
1 3 4	$0.750\sigma^2$	$0.750\sigma^2$	$0.333\sigma^2$	0.408
1 2 4	$0.714\sigma^2$	$0.428\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	0.378
1 2 3	$0.428\sigma^2$	$0.714\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	0.378
3 4	$1.000\sigma^2$	$1.000\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	0.707
2 4	$1.000\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	$1.000\sigma^2$	0.707
2 3	$0.500\sigma^2$	$1.000\sigma^2$	$1.000\sigma^2$	0.707
1 4	$3.000\sigma^2$	$1.000\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	1.000
1 3	$1.000\sigma^2$	$3.000\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	1.000
1 2	$0.750\sigma^2$	$0.750\sigma^2$	$1.000\sigma^2$	0.707

表8—14 共面配置中不同仪表组合的估值误差

仪表组合	方 差			性能指标 F_p
	x	y	z	
1 2 3 4	$0.500\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	$0.250\sigma^2$	0.250
2 3 4	$1.000\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	$0.333\sigma^2$	0.408
1 3 4	$0.500\sigma^2$	$1.000\sigma^2$	$0.333\sigma^2$	0.408
1 2 4	$0.750\sigma^2$	$0.750\sigma^2$	$0.333\sigma^2$	0.408
1 2 3	$0.750\sigma^2$	$0.750\sigma^2$	$0.333\sigma^2$	0.408
3 4	$1.000\sigma^2$	$1.000\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	* 0.707
2 4	$3.000\sigma^2$	$1.000\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	1.000
2 3	$3.000\sigma^2$	$1.000\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	1.000
1 4	$1.000\sigma^2$	$3.000\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	1.000
1 3	$1.000\sigma^2$	$3.000\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	1.000
1 2	$1.000\sigma^2$	$1.000\sigma^2$	$0.500\sigma^2$	0.707

可以看出，三种编排中对称配置的误差传播特性事实上是最佳的。当全部仪表均正常工作时，沿每个参考正交轴的标准差减小为 0.612σ 。有一个仪表故障时，标准差为 0.724σ 。只有二个仪表失效的情况下，其标准差才接近于单个仪表测量轴的标准差。

§ 8—3 余度惯性仪表的性能管理

采用余度仪表编排的一个高可靠性惯导系统，应当具有“故障检测”、“故障识别”、“系统重新编排”以及可能的“仪表再校准”的功能。所有这些功能可通过一个称为“惯性仪表性能管理”的控制中心，由计算机软件来完成。图 8—12 和图 8—13 示出两种“惯性仪表性能管理”方案的流程图。第一种方案包含故障检测、故障识别和系统重新编排。第二种方案还具有确定是否为软故障（指性能递降，约相当于正常偏差的 10 倍，它需要通过测量结果的比较进行检测），以及在软故障条件下，重新校准仪表的能力。

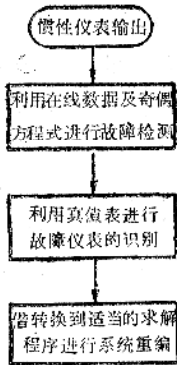


图 8—12 第一种惯性仪表性能管理方案

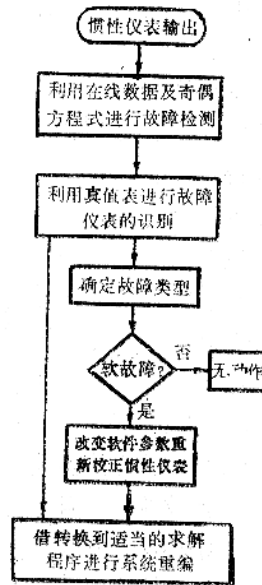


图 8—13 第二种惯性仪表性能管理方案

以下分别叙述六个单自由度陀螺仪系统和四个双自由度陀螺仪系统的性能管理概念。

一、六个单自由度陀螺系统

1. 故障检测与识别

故障检测的作用在于发现系统某处是否有故障，而故障识别则是指辨识出发生故障的仪表而加以隔离。现在简要说明利用四个矢量之间的线性相关性质进行故障检测的原理。如图 8—14 所示，设有三个不共面的矢量 E_i 、 E_j 、 E_k ，任何一个矢量都可以作为由平行于这三个矢量的三对

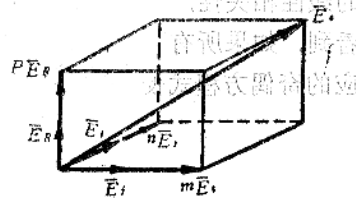


图 8—14 四个矢量的线性相关性

边所构成的平行六面体的对角线。这样，该任意矢量就可以通过三个不共面的矢量来表示，即

$$\mathbf{E}_e = m\mathbf{E}_i + n\mathbf{E}_j + p\mathbf{E}_k \quad (8-104)$$

其中 m 、 n 、 p 为任意比例系数。进一步推知，在一般情况下，任何四个矢量存在如下关系式：

$$a\mathbf{E}_i + b\mathbf{E}_j + c\mathbf{E}_k + d\mathbf{E}_e = 0 \quad (8-105)$$

这个关系式表示出了四个空间矢量的线性相关关系，也就是说，第四个矢量与其它三个矢量线性相关。如果四个矢量为四个角速率矢量，那么也满足上式。当用四个陀螺感测这四个角速率矢量时，略去陀螺的测量误差，则四个陀螺的测量值 m_1 、 m_2 、 m_3 、 m_4 也应满足下列线性相关方程：

$$\alpha m_1 + \beta m_2 + \gamma m_3 + \delta m_4 = 0 \quad (8-106)$$

根据方程 (8-106) 可以判断四个陀螺的工作是否正常。如果四个陀螺的测量结果符合上述关系，即 (8-106) 式成立，则说明四个陀螺仪工作正常。否则，当 (8-106) 式不成立时便说明四个仪表中至少有一个出了故障。这样，故障检测问题便可转换为对线性相关方程的逻辑判断问题。在故障检测与识别中，通常把方程式称为奇偶方程式。

进一步考察可以看出，奇偶方程式应选择成，能从各仪表测量输出值的综合中消去被测量的影响。例如，从陀螺仪的输出中消去被测角速率信息，从加速度计的输出中消去被测加速度信息。只剩下与敏感元件不定性误差有关的效应作为奇偶方程式余值被保留下来。利用奇偶方程式余值的大小来判断是否有故障。

奇偶方程式余值是敏感元件误差，敏感元件噪声的函数，同时它也受飞机飞行环境对这些不定性误差的影响。当没有故障元件出现时，这些不定性误差规定了故障检测系统工作的一个基线。若有一个元件发生故障，奇偶方程式余值的大小及统计参数便发生变化，以反映这个故障的出现。例如，在产生一个较大的偏置故障时，将引起奇偶方程式余值有一个阶跃变化。当奇偶方程式余值或其函数值超出某个确定的门限时，这个故障即可被检测出来。选择合适的门限值，是故障检测与识别系统设计中的一个重要课题。基本的思路是要这样选择门限值，它能检测和隔离出尽可能小的故障，保证系统有最好的性能（如故障检测灵敏度及正确检测概率等），同时又要将由敏感元件噪声、量化等产生的虚假检测的可能性减至最小。除了考虑上述高频噪声影响而设置常值门限外，计及飞行轨迹和机动飞行的效应，可能还需要有动态故障检测门限值，因为机动飞行中奇偶方程式余值的标称值会增大。

由方程式 (8-22)，利用六陀螺仪十二面体配置中的对称性，按四个陀螺仪测量值之间的线性相关性质，可以列出 15 个奇偶方程式 (表 8-15)。式中 $|T|$ 为故障检测门限。可以看到，如果所有陀螺都工作正常，则上述全部奇偶方程式都能满足。若出现陀螺故障，则相应的奇偶方程式便不成立。

表8—15 六陀螺系统奇偶方程式

序号	仪表组合	奇 偶 方 程 式
1	1 2 3 4	$(m_1 - m_2)C - (m_3 + m_4)S \leq T $
2	1 2 3 5	$(m_2 + m_3)C - (m_1 + m_5)S \leq T $
3	1 2 3 6	$(m_3 - m_1)C + (m_2 - m_6)S \leq T $
4	1 2 4 5	$(m_4 - m_1)C + (m_2 + m_5)S \leq T $
5	1 2 4 6	$(m_2 + m_4)C - (m_1 - m_6)S \leq T $
6	1 2 5 6	$(m_5 - m_6)C - (m_1 + m_2)S \leq T $
7	1 3 4 5	$(m_4 + m_5)C - (m_1 + m_3)S \leq T $
8	1 3 4 6	$(m_6 - m_3)C + (m_1 + m_4)S \leq T $
9	1 3 5 6	$(m_1 + m_6)C - (m_3 + m_5)S \leq T $
10	1 4 5 6	$(m_5 - m_1)C + (m_4 - m_6)S \leq T $
11	2 3 4 5	$(m_5 - m_3)C + (m_4 - m_2)S \leq T $
12	2 3 4 6	$(m_4 + m_6)C + (m_2 - m_3)S \leq T $
13	2 3 5 6	$(m_2 - m_5)C + (m_3 + m_6)S \leq T $
14	2 4 5 6	$(m_2 + m_6)C + (m_4 - m_5)S \leq T $
15	3 4 5 6	$(m_4 - m_3)C + (m_5 + m_6)S \leq T $

$C = \cos \alpha = 0.85065$ $S = \sin \alpha = 0.52574$

若把上述第 i 个奇偶方程式与一个二进制数 K_i 联系起来, 当相应的奇偶方程式成立时, $K_i=0$, 当它不成立时, $K_i=1$, 按照这个原则可以建立起进行故障识别的真值表(表8—16)。如果所有陀螺工作正常, 则 $K_1 \sim K_{15}$ 均等于零。按方程式(8—62), 系统数据处理程序标号取为 P_0 。若陀螺1失效, 则与陀螺1测量值 m_1 有关的方程式不成立, $K_1 \sim K_{10}$ 等于1, 而其它与 m_1 无关的奇偶检验值 $K_{11} \sim K_{15}$ 均等于零。这时, 系统数据处理程序标号为 P_1 。它和 P_0 的区别是已把测量矩阵 H 及测量矢量 m 中与 m_1 有关的行置零。这样便将陀螺1进行故障隔离。如果又有一个陀螺出现故障, 则将检验其余的奇偶值 $K_{11} \sim K_{15}$, 亦可以对故障仪表进行隔离。倘若有三个陀螺失效, 则奇偶方程式没有一个满足, 所有奇偶检验值为1。此时只能对故障进行检测, 但不能实行隔离。由此, 六陀螺十二面体配置方案具有故障—工作/故障—工作/故障—安全的余度等级。从可靠性角度看, 它相当于四套平台系统并行工作。借助于辅助诊断, 比较各奇偶方程式余值的相对值及符号, 也可能识别第三个故障。这时程序处理机构允许, 只要有三个陀螺是好的, 系统仍可继续工作。

表2-18 进行故障检测及识别的真值表

故障 陀螺	奇 偶 检 验 值															重编解 程 序	仪表性能 管理状态
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}		
没有	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	P0	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	P1		
2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	P2	
3	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	P3	
4	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	P4	
5	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	P5	
6	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	P6	
1, 2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	P7	
1, 3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	P8	能进行故障 检测及故障 识别
1, 4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	P9	
1, 5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	P10	
1, 6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	P11	
2, 3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	P12	
2, 4	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	P13	
2, 5	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	P14	
2, 6	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	P15	
3, 4	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	P16	
3, 5	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	P17	
3, 6	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	P18	
4, 5	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	P19	
4, 6	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	P20	
5, 6	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	P21	
3个及 3个以上 的仪表 失效	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	P22	只能进行 故障检测

2. 系统重新编排

对故障仪表进行检测和识别后, 下一步的工作是把故障仪表测量值从数据处理程序中去掉, 实现系统的重新编排。这项工作并不需要改变硬件, 而是通过计算机改变软件程序来实现的。与表 8—16 前 21 种故障状态相对应的系统重编程序是求解下列数据处理方程式:

$$\hat{\omega} = (H_i^T H_i)^{-1} H_i^T m_i, \quad i=1 \sim 21 \quad (8-107)$$

为清楚起见, 将六陀螺系统各种重编程序标号 P_i 所对应的 m_i 及 H_i 列表如下:

六陀螺系统重编程序的 m_i 及 H_i

P_1 :

$$m_1 = \begin{pmatrix} m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix} \quad H_1 = \begin{pmatrix} -S & 0 & C \\ C & S & 0 \\ C & -S & 0 \\ 0 & C & S \\ 0 & C & -S \end{pmatrix}$$

P_2 :

$$m_2 = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} S & 0 & C \\ C & S & 0 \\ C & -S & 0 \\ 0 & C & S \\ 0 & C & -S \end{pmatrix}$$

P_3 :

$$m_3 = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix} \quad H_3 = \begin{pmatrix} S & 0 & C \\ -S & 0 & C \\ C & -S & 0 \\ 0 & C & S \\ 0 & C & -S \end{pmatrix}$$

P_4 :

$$m_4 = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix} \quad H_4 = \begin{pmatrix} S & 0 & C \\ -S & 0 & C \\ C & S & 0 \\ 0 & C & S \\ 0 & C & -S \end{pmatrix}$$

$P_5:$

$$\mathbf{m}_5 = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_5 = \begin{pmatrix} S & 0 & C \\ -S & 0 & C \\ C & S & 0 \\ C & -S & 0 \\ 0 & C & -S \end{pmatrix}$$

 $P_6:$

$$\mathbf{m}_6 = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_6 = \begin{pmatrix} S & 0 & C \\ -S & 0 & C \\ C & S & 0 \\ C & -S & 0 \\ 0 & C & S \end{pmatrix}$$

 $P_7:$

$$\mathbf{m}_7 = \begin{pmatrix} m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_7 = \begin{pmatrix} C & S & 0 \\ C & -S & 0 \\ 0 & C & S \\ 0 & C & -S \end{pmatrix}$$

 $P_8:$

$$\mathbf{m}_8 = \begin{pmatrix} m_2 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_8 = \begin{pmatrix} -S & 0 & C \\ C & -S & 0 \\ 0 & C & S \\ 0 & C & -S \end{pmatrix}$$

 $P_9:$

$$\mathbf{m}_9 = \begin{pmatrix} m_2 \\ m_3 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_9 = \begin{pmatrix} -S & 0 & C \\ C & S & 0 \\ 0 & C & S \\ 0 & C & -S \end{pmatrix}$$

 $P_{10}:$

$$\mathbf{m}_{10} = \begin{pmatrix} m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{10} = \begin{pmatrix} -S & 0 & C \\ C & S & 0 \\ C & -S & 0 \\ 0 & C & -S \end{pmatrix}$$

P_{11} :

$$\mathbf{m}_{11} = \begin{pmatrix} m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{11} = \begin{pmatrix} -S & 0 & C \\ C & S & 0 \\ C & -S & 0 \\ 0 & C & S \end{pmatrix}$$

 P_{12} :

$$\mathbf{m}_{12} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{22} = \begin{pmatrix} S & 0 & C \\ C & -S & 0 \\ 0 & C & S \\ 0 & C & -S \end{pmatrix}$$

 P_{13} :

$$\mathbf{m}_{13} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_3 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{13} = \begin{pmatrix} S & 0 & C \\ C & S & 0 \\ 0 & C & S \\ 0 & C & -S \end{pmatrix}$$

 P_{14} :

$$\mathbf{m}_{14} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{14} = \begin{pmatrix} S & 0 & C \\ C & S & 0 \\ C & -S & 0 \\ 0 & C & -S \end{pmatrix}$$

 P_{15} :

$$\mathbf{m}_{15} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{15} = \begin{pmatrix} S & 0 & C \\ C & S & 0 \\ C & -S & 0 \\ 0 & C & S \end{pmatrix}$$

 P_{16} :

$$\mathbf{m}_{16} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{16} = \begin{pmatrix} S & 0 & C \\ -S & 0 & C \\ 0 & C & S \\ 0 & C & -S \end{pmatrix}$$

P_{17} :

$$\mathbf{m}_{17} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_4 \\ m_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{17} = \begin{pmatrix} S & 0 & C \\ -S & 0 & C \\ C & -S & 0 \\ 0 & C & -S \end{pmatrix}$$

 P_{18} :

$$\mathbf{m}_{18} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_4 \\ m_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{18} = \begin{pmatrix} S & 0 & C \\ -S & 0 & C \\ C & -S & 0 \\ 0 & C & S \end{pmatrix}$$

 P_{19} :

$$\mathbf{m}_{19} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{19} = \begin{pmatrix} S & 0 & C \\ -S & 0 & C \\ C & S & 0 \\ 0 & C & -S \end{pmatrix}$$

 P_{20} :

$$\mathbf{m}_{20} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{20} = \begin{pmatrix} S & 0 & C \\ -S & 0 & C \\ C & S & 0 \\ 0 & C & S \end{pmatrix}$$

 P_{21} :

$$\mathbf{m}_{21} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{21} = \begin{pmatrix} S & 0 & C \\ -S & 0 & C \\ C & S & 0 \\ C & -S & 0 \end{pmatrix}$$

当有三个和三个以上的仪表失效时，系统不可能进行重新编排。这时，计算机应报告，全部系统出了故障。

在具体执行系统重编时，可以按加权的最小二乘法估值公式(8-56)取

$$\hat{\omega} = (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{m} \quad (8-108)$$

把加权矩阵 \mathbf{W} 换成能反映仪表是否有故障的对角线矩阵。当全部仪表都工作正常时，它是一个单位阵，即

$$W = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

如第 i 个仪表出故障, 则与之对应的第 i 个对角元素置零。这样, 在数据处理过程中, 即将故障仪表的测量值删除, 从而完成了故障仪表的隔离及系统重编。

3. 惯性仪表的重新校准

如果出故障的陀螺具有软故障, 象零偏误差、刻度因数的变化或在平均值附近的指示不稳定等, 均可重新校准。通过系统重编可将故障陀螺隔离并转入故障分类状态。把它的输出和工作正常的陀螺输出进行比较, 以决定所发生故障的类型和需要校正的量。利用改变软件的某些参数使性能恶化的仪表恢复其功能。按自适应数据处理准则, 可将该仪表重新编入。

“惯性仪表性能管理”主要功能是故障检测, 故障识别及系统重编。假如也能完成仪表的重新校准, 则系统的可靠性可进一步提高。

二、四个双自由度陀螺系统

通常, 在故障检测中, 采用两种不同的方法。第一种是前面提到的, 借比较一组仪表 (不包括某些仪表) 的测量值, 得出“间接”的奇偶检验信号, 利用逻辑运算, 进行故障仪表的检测与识别。第二种方法则是根据一个仪表本身的测量值和利用其他仪表测量值求得的其最小二乘方估值的差值, 作为“直接”检验信号, 来估算出单个仪表的误差。然后, 把这些差值编入一个决策函数中, 将决策函数与门限值进行对比, 以便做出有关故障检测与隔离的决定。虽然采用双轴仪表的余度系统也可以利用第一种方法进行故障检测与识别, 但为了扩大思路, 设计出性能更好的余度容错编排, 在这一小节我们将用四个双自由度陀螺配置模型阐述第二种故障检测方法的基本原理并评价其故障检测及隔离的性能。

1. 故障检测与识别

由表 8—15 可以看出, 一个奇偶方程式是一些仪表输出 m_i 的线性组合, 前面已经提到, 它与被测的真实惯性数据矢量 X (见 8—49 式) 无关。取 p 表示奇偶方程式余值, 则有

$$p = \mathbf{v}_n^T \mathbf{m} \quad (8-109)$$

式中 \mathbf{v}_n 是一个奇偶方程式系数的 n 维矢量

$$\mathbf{v}_n^T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

由 p 与 X 无关的条件得到

$$\mathbf{H}^T \mathbf{v}_n = 0 \quad (8-110)$$

方程式 (8—110) 是三个线性方程式组。因为一共有 n 个未知数, 故决定系数的问题有 $n-3$ 个自由度。这表示, 虽然有无穷多个可能的奇偶方程式, 但最多只有 $n-3$ 个奇偶方程式是线性独立的。

将(8—49)式代入(8—108)式, 在满足(8—110)式的条件下, p 仅是测量噪声矢量 ξ 的函数,

$$p = \mathbf{V}_n^T \xi \quad (8-111)$$

ξ 的统计特性由(8—50)式给出, 在所有陀螺均正常工作的情况下

$$E\{p\} = 0; \quad \sigma_p^2 = \mathbf{V}_n^T \mathbf{V}_n \sigma^2 \quad (8-112)$$

假定一个陀螺的故障影响其测量值 m_j 的形式, 是在 m_j 上附加一个常值偏置 b_j 。由此, 当一个陀螺发生故障时, 其测量值为

$$m_j = \mathbf{h}_j^T \mathbf{X} + \xi_j + b_j \quad (8-113)$$

这时, p 的统计特性由下式给出

$$E\{p\} = v_j b_j; \quad \sigma_p^2 = \mathbf{V}_n^T \mathbf{V}_n \sigma^2 \quad (8-114)$$

两种不同工作状态(即正常工作与故障状态)下, p 的平均值的差异, 将构成检测一个仪表故障的基础。

显然, 一个奇偶方程式可用来检测多个故障, 但却不能隔离它们。为了进行隔离, 需要一组奇偶方程式。设 r 维矢量 \mathbf{P}_r 的元素表示 r 个奇偶方程式的余值, 将(8—109)式普遍化到矢量情况, 得到

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{V} \mathbf{m} \quad (8-115)$$

式中 \mathbf{V} 是 r 个奇偶方程式的系数矩阵。由 \mathbf{P}_r 与 \mathbf{X} 无关的条件, (从8—110)式得到

$$\mathbf{V} \mathbf{H} = 0 \quad (8-116)$$

矩阵 \mathbf{V} 完全决定了奇偶方程式余值 \mathbf{P}_r 。由符合条件(8—116)的系数所组成的奇偶方程式可能有无穷多个。如果满足下述两个条件, 则认为它们是适合进行故障检测与隔离的:

(1) 每个测量值至少在一个奇偶方程式中出现; (2) 由需要识别的仪表故障产生的奇偶方程式余值的模型, 经过适当的数据处理后, 应能提供进行故障识别所必需的信息。

若针对每个可受故障影响的测量值编制一个奇偶方程式, 便得到 n 个奇偶方程式组。假设用奇偶方程式

$$p_1 = \mathbf{V}_{1n}^T \mathbf{m} \quad (8-117)$$

来检测反映在测量值 m_1 中的故障, 取

$$\mathbf{V}_{1n}^T = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n}) \quad (8-118)$$

在选择 \mathbf{V}_{1n} 的系数时, 应使 p_1 对 m_1 尽可能敏感, 而对其它各个测量值则尽量不敏感。为了实现这一点, 可令系数 $v_{11} = 1$, 并使其它系数的平方和为最小。因此, 应当减至最小的代价函数是

$$G = \sum_{k=2}^n v_{1k}^2 \quad (8-119)$$

同时还要适合对系数的下列约束

$$\mathbf{H}^T \mathbf{V}_{1n} = 0 \quad (8-120)$$

定义下列 $(n-1)$ 维矢量

$$\mathbf{V}_{1(n-1)}^T = (v_{12}, v_{13}, \dots, v_{1n}) \quad (8-121)$$

和 $3 \times (n-1)$ 矩阵

$$\mathbf{H}_{n-1}^T = (\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \dots, \mathbf{h}_n) \quad (8-122)$$

式中 \mathbf{h}_j 是第 j 个测量轴方向上的单位矢量。

这样, 方程式 (8—120) 可改写成

$$\mathbf{H}_{n-1}^T \mathbf{V}_{1(n-1)} + \mathbf{h}_1 = 0 \quad (8-123)$$

由此, 求条件极值的问题简化成下列线性方程式的解

$$\begin{bmatrix} 2I_{(n-1)} & \mathbf{H}_{n-1} \\ \mathbf{H}_{(n-1)}^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1(n-1)} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1} \\ -\mathbf{h}_1 \end{bmatrix} \quad (8-124)$$

式中 $\boldsymbol{\eta}$ 是一个拉格朗日乘子矢量。其解是

$$\mathbf{V}_{1(n-1)} = -\mathbf{H}_{n-1} (\mathbf{H}_{n-1}^T \mathbf{H}_{n-1})^{-1} \mathbf{h}_1 \quad (8-125)$$

由此, 奇偶方程式余值 p_1 由下式给出

$$p_1 = m_1 - \mathbf{h}_1^T (\mathbf{H}_{n-1}^T \mathbf{H}_{n-1})^{-1} \mathbf{H}_{n-1}^T \mathbf{m}_{n-1} \quad (8-126)$$

式中 $\mathbf{m}_{n-1}^T = (m_2, m_3, \dots, m_n)$ (8-127)

(8—126) 式右边的第二项是根据不包含 m_1 的 $n-1$ 个测量值而求得的 m_1 的最小二乘方估值 \hat{m}_1 。这样, 为了检测反映在测量值 m_1 中的故障, 所必须的奇偶方程式余值具有下列形式

$$p_1 = m_1 - \hat{m}_1 \quad (8-128)$$

上述确定奇偶方程式余值 p_1 的系数的方法, 可容易地推广到其它 $n-1$ 奇偶方程式余值。对于每个奇偶方程式余值都存在一个与 (8—128) 式类似的关系。

$$p_i = m_i - \hat{m}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8-129)$$

由此, 我们已经探明, 这种构成 n 个奇偶方程式组的方法, 等价于计算 n 个余值组, 每个余值表示一个测量值和根据其它测量值求得的最小二乘方估值的差值。容易验证, 用这种方法构成的奇偶方程式组满足前面规定的两个条件。 n 维余值矢量 \mathbf{P}_n 由下式给出

$$\mathbf{P}_n = [\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T] \mathbf{m} = \mathbf{V} \mathbf{m} \quad (8-130)$$

我们可以根据 n 个余值的平方和来建立故障检测的决策函数

$$DFD = \mathbf{P}_n^T \mathbf{P}_n \quad (8-131)$$

并根据最大余值的平方来建立隔离决策函数

$$DFI_j = p_j^2 \quad (8-132)$$

式中 p_j 是 \mathbf{P}_n 的第 j 个元素。

当全部陀螺均正常工作时, 方程式 (8—129) 与 (8—131) 所确定的值应减小为零。如有一个仪表出现故障, 则测量误差将通过 (8—129) 与 (8—131) 式传播。采用这个概念的故障隔离算法大致是这样的, 首先将决策函数与一个容许的门限进行对比。如果系统工作在容许的误差范围内, 则无需采取任何动作, 直到下一个故障隔离迭代。倘若超出容许的门限值, 则有最大余值平方的那个仪表很可能已经发生了故障, 它应当被隔离。

2. 故障检测能力的评价

因为每个奇偶方程式余值用来检测和识别反映在一个测量值的故障, 根据在假设检验中采用的距离测度概念, 对于方程式组的每一个可定义一个距离测度矢量。在正常工作状态时, 奇偶方程式余值 P_i 的统计特性由 (8—112) 式确定

$$E\{p_i\} = 0; \quad \delta_{p_i}^2 = \mathbf{V}_{i:n}^T \mathbf{V}_{i:n} \sigma^2 \quad (8-133)$$

如在测量值 m_i 中出现常值偏置故障, p_i 的统计特性由 (8—114) 式给出

$$E\{p_i\} = u_{i1} b_i; \quad \sigma_{p_i}^2 = \mathbf{V}_{i:n}^T \mathbf{V}_{i:n} \sigma^2 \quad (8-134)$$

假定测量噪声 ξ 是高斯噪声矢量, 从假设检验的观点看, 这相当于附加有零均值高斯噪声时恒定信号的检测。上述两个假设间的距离测度由下式确定:

$$J_{ii} = (v_{ii}b_i - 0)(V_{ii}^T V_{ii})^{-1} \sigma^{-2} (v_{ii}b_i - 0) \quad (8-135)$$

如取某个特定值 b_i 和 σ^2 将 (8-135) 式标准化, 则得

$$J_{ii} = (V_{ii}^T V_{ii})^{-1} v_{ii}^2 \quad (8-136)$$

在这里, J_{ii} 可解释为信噪比。由此, 对于不同仪表的常值偏置故障, 可得 p_i 的距离测度矢量为

$$J_i^T = (J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{in}) \quad (8-137)$$

其中各分量元素表示 p_i 对不同仪表故障的分辨能力。因为我们要求 p_i 对反映在 m_i 中的故障的检测能力要高, 而对所有其它故障要低。于是对 p_i 规定了下述标量性能指标

$$F_i' = J_{ii} / \max_j J_{ij}, \quad j \neq i \quad (8-138)$$

而对于奇偶方程式组, 性能指标则定义为

$$F_a = \min_i [J_{ii} / \max_j J_{ij}], \quad J \neq i \quad (8-139)$$

显然, F_a 值变大则表示 n 个奇偶方程式组可检测某个最小故障状态的能力增强。它是矩阵 V 的函数, 而 V 又取决于惯性仪表配置的几何图形。对于一个选定的仪表配置, n 个奇偶方程式组是唯一的。因此, F_a 可作为评价不同仪表配置的故障检测能力的性能指标。

3. 故障检测与识别的数字结果

在四个双自由度陀螺配置模型中, 建立 8 个奇偶方程式组, 每个奇偶方程式用来检测 8 个测量轴之一的故障。因为第 i 个陀螺的故障可能影响从它导出的二个测量值, 只有用其它三个陀螺的测量值才能构成检测第 i 个陀螺测量值故障的奇偶方程式。这样, 在每个奇偶方程式中应使适当的系数为零。按公式 (8-125), 取 $n=8$, 对四陀螺系统的对称配置, 正交配置及共面配置分别求出其解, 即可得到 8 个奇偶方程式中每个式子的唯一的一组系数。所得结果列于表 8-18~表 8-20。由 (8-137) 式确定的距离测度及按 (8-139) 式计算的性能指标 F_a 也列于表中。所有系数相同的奇偶方程式, 都有共同的距离测度矢量。

表8-18 对称配置的 8 个奇偶方程式组

奇偶方程式 p_j	测量值 m_j 的奇偶方程式系数							
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8
p_1	1	0	-0.2000	0.1464	0.2000	-0.4000	-0.2000	-0.5464
p_2	0	1	-0.5464	-0.2000	-0.4000	0.2000	0.1464	-0.2000
p_3	-0.2000	-0.5464	1	0	-0.2000	0.1464	0.2000	-0.4000
p_4	0.1464	-0.2000	0	1	-0.5464	0.2000	-0.4000	0.2000
p_5	0.2000	-0.4000	-0.2000	-0.5464	1	0	-0.2000	0.1464
p_6	-0.4000	0.2000	0.1464	-0.2000	0	1	0.5464	-0.2000
p_7	-0.2000	0.1464	0.2000	-0.4000	-0.2000	-0.5464	1	0
p_8	-0.5464	-0.2000	-0.4000	0.2000	0.1464	-0.2000	0	1
奇偶性能方程指标	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8
p_8 3,3	0.187	0.0025	0.100	0.025	0.013	0.025	0	0.625

表8—19 共面配置的 8 个奇偶方程式组

奇偶方程式 p_i	测量值 m_j 的奇偶方程式系数								
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	
p_1	1	0	-0.1667	-0.1667	-0.5202	0.1869	0.1869	-0.5202	
p_2	0	1	-0.1667	-0.1667	0.1869	-0.5202	-0.5202	0.1869	
p_3	-0.1667	-0.1667	1	0	-0.5202	0.1869	-0.5202	0.1869	
p_4	-0.1667	-0.1667	0	1	0.1869	-0.5202	0.1869	-0.5202	
p_5	-0.5202	0.1869	-0.5202	0.1869	1	0	-0.1669	-0.1667	
p_6	0.1869	-0.5202	0.1869	-0.5202	0	1	-0.1667	-0.1667	
p_7	0.1869	-0.5202	-0.5202	0.1869	-0.1667	-0.1667	1	0	
p_8	-0.5202	0.1869	0.1869	0.5202	-0.1667	-0.1667	0	1	
奇偶方程式 p_8	性能指标 3.7	距 离 测 度 J_j							
		J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8
		0.162	0.021	0.021	0.162	0.017	0.017	0	0.6

表8—20 正交配置的 8 个奇偶方程式组

奇偶方程式 p_3	测量值 m_j 的奇偶方程式系数								
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	
p_1	1	0	0	0	-0.50	0	-0.50	0	
p_2	0	1	0.3536	0.3536	0	0.3536	0	0.3536	
p_3	0	0.3536	1	0	0	-0.75	0	0.25	
p_4	0	0.3536	0	1	0	0.25	0	-0.75	
p_5	-0.50	0	0	0	1	0	-0.50	0	
p_6	0	0.4041	-0.7143	0.1428	0	1	0	0.1428	
p_7	-0.50	0	0	0	-0.50	0	1	0	
p_8	0	0.4041	0.1428	-0.7143	0	0.1428	0	1	
奇偶方程式 p_8	性能指标 2.0	距 离 测 度 J_j							
		J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8
		0	0.095	0.012	0.298	0	0.012	0	0.583
p_7	4.0	0.167	0	0	0	0.167	0	0.667	0
p_2	8.0	0	0.667	0.083	0.083	0	0.083	0	0.083
p_5	1.8	0	0.071	0.571	0	0	0.321	0	0.036

以上提到的是检测第一个故障时的奇偶方程式余值组。如第 j 个仪表已被识别为故障仪表，则在检测第二个故障时，在上述方程式中应用 m_j 代替 m_i ，而且故障判断门限值也要作相应改变。考察这些表格中的数值可以看出，在三种配置中，其面配置的性能指标 F_d 最大 ($F_d=3.7$)。这表明，对于选定的决策函数和决策机构，它有更好的故障检测及识别性能。而在正交配置中，最小的一个性能指标是 $F_d=1.8$ 。它就是按 (8—139) 式求出的奇偶方程式组的性能指标。这意味着，正交配置情况下，采用 8 个奇偶方程式余值组，可能得不到满意的故障检测性能。这时建议改用第一种故障检测方法，利用“间接”的奇偶检测信号，参照 (8—28) 式，列出下述 6 个奇偶方程式

$$\begin{aligned}
 m_5 - m_7 &\leq |T| \\
 m_2 + (1/\sqrt{2})m_3 + (1/\sqrt{2})m_4 &\leq |T| \\
 m_3 - m_6 &\leq |T| \\
 m_7 - m_1 &\leq |T| \\
 m_5 - m_1 &\leq |T| \\
 m_4 - m_8 &\leq |T|
 \end{aligned}
 \tag{8-140}$$

利用逻辑运算，进行故障仪表的检测和识别。其步骤与前述六个单自由度陀螺系统情况类似。此处不再赘述。

§8—4 故障检测与识别系统设计中的一些参数选择问题

前面各节介绍了余度惯性仪表的最佳配置方法和对余度惯性仪表进行故障检测及识别的基本原理。现在简要说明余度惯性仪表中故障检测及识别系统的一些参数选择问题。

图 8—15 是飞机捷联惯导中故障检测及识别系统的原理方块图。系统编排成可检测与识别三种等级的故障。

1. 硬故障 它具有相当大的数值，主要影响飞行控制性能。

2. 中等故障 它具有中等数值，主要影响仪表显示性能。

3. 软故障 它具有相当小的数值，主要影响导航性能。

这里所说的故障检测与识别系统不包括机内故障检测设备。可以看出，各个故障检测通道中均利用一组奇偶方程式对惯性仪表的输出进行数据处理，来实现故障仪表的检测与识别。前面已经提到，奇偶方程式是线性的常系数方程式，它选择成能从测量数据的运算中消去由惯性仪表所感测的量。例如，从陀

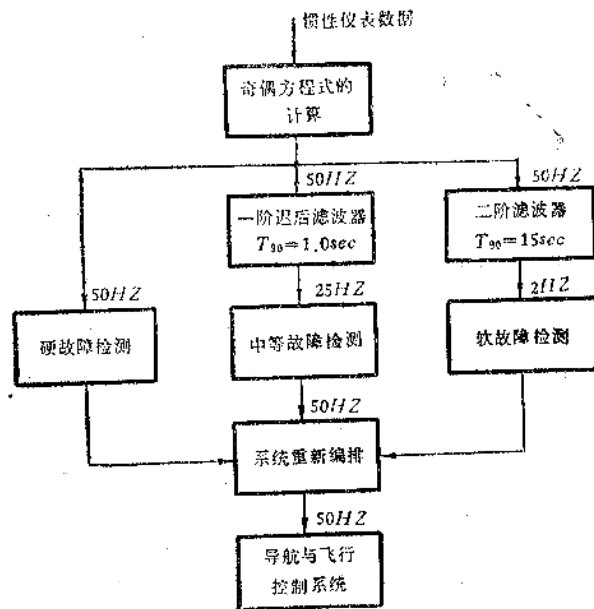


图8—15 故障检测及识别系统的方块图

陀螺仪的输出中消去被测角速率信息，从加速度计的输出中消去被测加速度信息。只有与惯性仪表有关的不定性误差效应作为奇偶方程式的余值被保留下来。在故障检测环节中，把奇偶方程式余值或其函数值与一个确定的门限值相比较，来判断系统内是否有故障。由于奇偶方程式余值是惯性仪表误差和惯性仪表噪声的函数，同时还受机动飞行环境的影响，在选择门限值时，应使它既能检测和隔离尽可能小的故障，保证系统有良好的性能，又能把由仪表噪声，量化等因素引起的虚假检测概率减至最小。同时考虑机动飞行环境的影响，门限值中除包含常值分量外，还要设置动态检测门限值。

动态检测门限值的计算过程如图 8—16 所示。它由惯性仪表误差和奇偶方程式余值的上限值推出。仪表误差和奇偶方程式余值的上限值是仪表误差模型、仪表误差值及沿机体轴线加速度和角速率的函数。对于中等故障通道及软故障通道，在计算惯性仪表误差和奇偶方程式余值的上限值之前，被测机体线加速度和角速率要先进行滤波。这样可以减小扰动和仪表噪声等所造成的干扰水平，以求得可检测软故障的满意的门限值。严格说来，在求解奇偶方程式之前，应对惯性仪表的输出进行滤波。然而，由于奇偶方程式是线性的，奇偶方程式的求解与滤波操作可以交换顺序。对奇偶方程式余值进行滤波可能更有效，因为所需的滤波器较少。

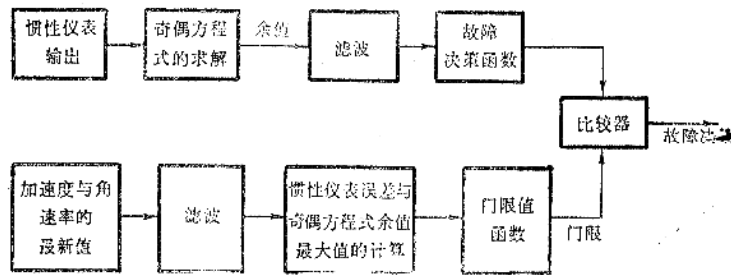


图8—16 动态门限值的计算

在陀螺仪的故障检测及识别系统中，一般硬故障通道和中等故障通道只设常值门限。硬故障检测门限约为 $250^\circ/h$ ，中等故障检测门限约为 $36^\circ/h$ 。软故障通道需设动态门限，其可检测的最小故障约为 $0.5^\circ/h$ 。在加速度计的故障检测及识别系统中，因为硬故障检测水平比较低，约为 $8 \times 10^{-3}g$ ，通常不再设置中等故障检测通道。软故障检测水平约为 $1.5 \times 10^{-3}g$ 。

由于硬故障的数值较大，它可利用原始的惯性仪表数据及奇偶方程式余值进行检测。发生硬故障的仪表必须立即从系统中删除以保证飞行安全。数值较小的故障有可能被仪表的标称误差和高频噪声、量化效应等掩盖在原始的仪表数据或奇偶方程式余值中。因此奇偶方程式余值需进行低通滤波，以增大仪表故障信号同仪表噪声及量化效应之比。为了检测中等故障，采用了一个有较快反应时间的一阶迟后滤波器。这种故障仍具有较大的数值，因此希望尽快从系统中删除，以免系统性能受到影响。为了检测较小的软故障，采用了可明显衰减仪表噪声干扰的二阶滤波器。这是因为在较小的软故障能对系统性能产生明显影响之前，容许有较长的时间将其隔离。在图 8—15 中，中等故障通道的滤波器是时间常数为 0.434 秒的一阶迟后网络（达到 90% 响应的上升时间 $T_{90}=1.0$ 秒）。软故障通道的滤波器是一个 $T_{90}=15$ 秒的二阶系统（二个一阶迟后网络的串联）。

硬故障的检测及隔离是以惯性仪表输出的计算速率进行的，通常取为 50 赫。这样做的理由是，硬故障仪表的输出数据可在其能影响飞机控制性能之前即被删除。中等故障和软故

障通道的采样速率可以选得较小，因为这种故障不会影响飞机的控制性能。实际选用的采样速率不是特别关键，唯一的要求是它应当足够快，以便和要求的系统性能相匹配。实践证明，上述两通道的采样速率可分别取为 25 赫和 2 赫。

最后，应当提到，本章所述的故障检测及识别方法是与奇偶方程式的应用有关的基本方法。也就是把惯性仪表测量数据直接地输入到计算机回路中去的一种简单的方法。如果对惯性仪表不精确性所引起的统计特性有较好的了解，则可采用统计方法和控制理论等手段来处理仪表测量数据，构成最佳检测系统和隔离逻辑线路。它可以减小检测延迟，减少故障判断的错误动作和增大决策的可靠性。但为此要提高对机载计算机的功能和可靠性的要求。

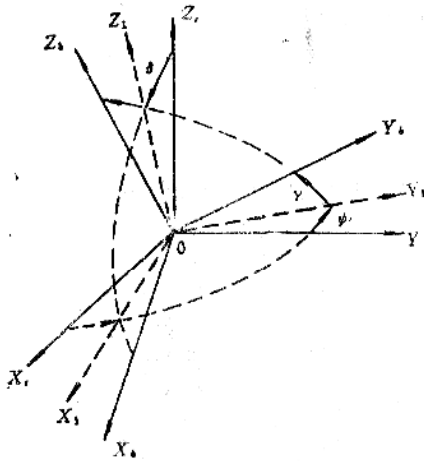
附录一

坐标变换的符号法

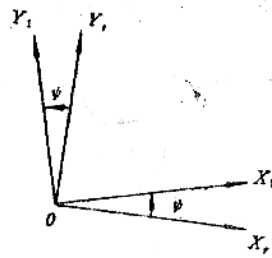
坐标变换的符号表示法是皮欧 (Richard L. Pio) 在 1964 年提出来的, 它既具有信号流图或方块结构图的优点, 又保持了坐标变换的特性, 使用起来比较方便。

设有两个坐标系 x, y, z 和 x_1, y_1, z_1 , 其方位关系如图 (A-1)。

x_1, y_1, z_1 绕 z 轴相对 x, y, z 的第一次转动, 见图 (A-2)。此时坐标关系为



图A-1 两坐标系之间的方位关系



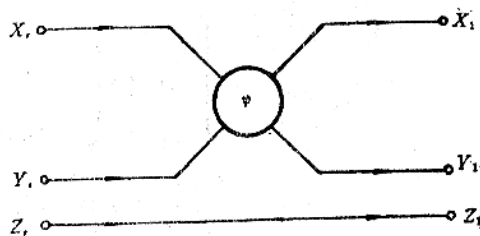
图A-2 第一次转动

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x \cos \psi + y \sin \psi \\ y_1 &= -x \sin \psi + y \cos \psi \\ z_1 &= z \end{aligned} \right\} \quad (A-1)$$

把 (A-1) 式写成矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (A-2)$$

如果把 (A-1) 式用图 A-3 的符号表示出来, 并作如下规定:



A-3 第一次转动的符号图

1. 转角用小圆内的符号表示。
2. 左方为转动前的坐标，相当于输入，右边为转动后的坐标，相当于输出。
3. 通过小圆，从上面输入，从上面输出，或从下面输入，从下面输出，都表示输入乘以 $\cos \psi$ 。
4. 斜线输出时，表示输入乘以 $\sin \psi$ ，如果斜线的斜率为正，则 $\sin \psi$ 为正，如果斜线的斜率为负，则 $\sin \psi$ 为负。
5. 不受转动影响的为一条直线，表示输入输出相等。

显然，按照图 A—3，应用上述规定，则得到 (A—1) 式。

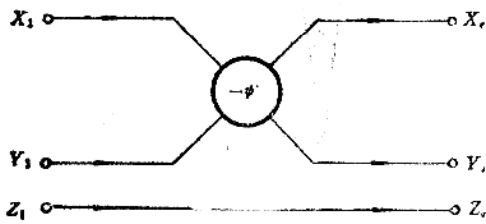
反变换时，为图 A—4，其规则为

1. 左边和右边的符号对调。
2. 小圆内的转角符号加负号。

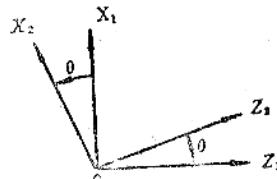
按图 A—4，可以写出变换关系为

$$\left. \begin{aligned} x_r &= x_1 \cos \psi - y_1 \sin \psi \\ y_r &= x_1 \sin \psi + y_1 \cos \psi \\ z_r &= z_1 \end{aligned} \right\} \quad (A-3)$$

第二次转动，绕 y_1 轴转动 θ 角，见图 A—5。由图 A—5，变换关系为



图A-4 反变换符号图



图A-5 第二次转动

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos \theta - z_1 \sin \theta \\ y_2 &= y_1 \\ z_2 &= x_1 \sin \theta + z_1 \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (A-4)$$

写成矩阵的形式为：

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}}_{C_\theta} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

第二次转动的符号法见图 A—6，显然，第二次转动的角度符号要加一负号。其反变换的规则同前。

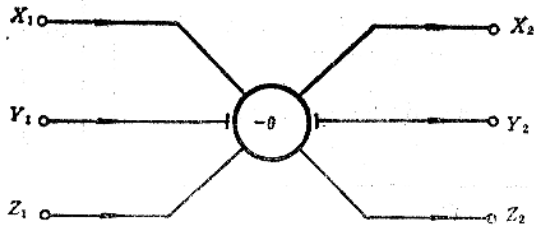


图 A—6 第二次转动符号图

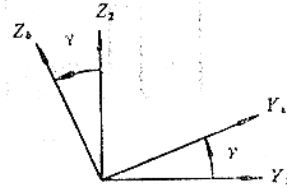


图 A—7 第三次转动

第三次转动，绕 x_2 轴转动 γ 角，如图 A—7。此时，坐标变换关系为：

$$\left. \begin{aligned} x_b &= x_2 \\ y_b &= y_2 \cos \gamma + z_2 \sin \gamma \\ z_b &= -y_2 \sin \gamma + z_2 \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (A-5)$$

把 (A—5) 写成矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}}_{C_r} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

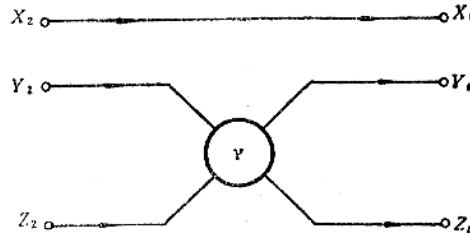


图 A—8 图三次转动的符号图

第三次转动的符号法如图 4—8。

把图 A—3, A—6, A—8, 串联起

来，则得到 x_b, y_b, z_b 相对 x, y, z , 连续三次转动后的坐标变换的符号图，见图 (A—9)。

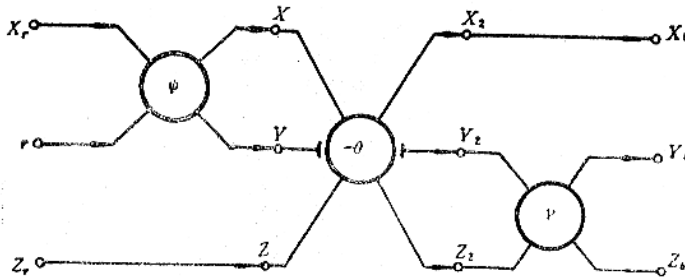


图 A—9 三次转动的符号图

按图 A—9，可以写出输出输入的关系为

$$\begin{aligned} x_b &= x_r \cos \psi \cos \theta + y_r \sin \psi \cos \theta - z_r \sin \theta \\ y_b &= x_r (\cos \psi \sin \theta \sin \gamma - \sin \psi \cos \gamma) \\ &\quad + y_r (\cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin \theta \sin \gamma) + z_r \cos \theta \sin \gamma \\ z_b &= x_r (\cos \psi \sin \theta \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma) \\ &\quad + y_r (\sin \psi \sin \theta \cos \gamma - \cos \psi \sin \gamma) + z_r \cos \theta \cos \gamma \end{aligned}$$

写成矩阵的形式为

$$\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \gamma & \sin \psi \sin \theta \sin \gamma & \cos \theta \sin \gamma \\ -\sin \psi \cos \gamma & +\cos \psi \cos \gamma & \\ \cos \psi \sin \theta \cos \gamma & \sin \psi \sin \theta \cos \gamma & \cos \theta \cos \gamma \\ +\sin \psi \sin \gamma & -\cos \psi \sin \gamma & \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_\gamma^b} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix}$$

不难证明

$$\mathbf{C}_\gamma^b = \mathbf{C}_\gamma \mathbf{C}_\theta \mathbf{C}_\psi$$

附录二

四元数理论

一、四元数代数

四元数是一个四维空间中的矢量，表示为

$$\mathbf{Q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \\ = q_0 + \mathbf{q}$$

四元数的代数运算按如下规律：

1. 四元数相等

如果两个四元数对应的元素相等，则两个四元数相等。

2. 四元数相加

四元数相加，为对应的元素相加。如：

$$\mathbf{A} = \lambda_0 + \lambda_1i + \lambda_2j + \lambda_3k \\ \mathbf{M} = m_0 + m_1i + m_2j + m_3k$$

则：

$$\mathbf{A} + \mathbf{M} = \lambda_0 + m_0 + (\lambda_1 + m_1)i + (\lambda_2 + m_2)j + (\lambda_3 + m_3)k$$

四元数相加，服从一般加法的交换律和结合律，即

$$\mathbf{A} + \mathbf{M} = \mathbf{M} + \mathbf{A} \quad (\text{交换律}) \\ (\mathbf{A} + \mathbf{M}) + \mathbf{N} = \mathbf{A} + (\mathbf{M} + \mathbf{N}) \quad (\text{结合律})$$

3. 四元数和标量相乘

四元数和标量相乘，等于四元数的各个元分别乘以标量。如：

$$a\mathbf{A} = a\lambda_0 + a\lambda_1i + a\lambda_2j + a\lambda_3k$$

式中 a ——标量。

四元数和标量相乘，服从一般乘法的交换律、结合律、和分配律，即

$$a\mathbf{A} = \mathbf{A}a \quad (\text{交换律}) \\ (ab)\mathbf{A} = \mathbf{A}(ba) \quad (\text{结合律}) \\ \left. \begin{aligned} (a+b)\mathbf{A} &= a\mathbf{A} + b\mathbf{A} \\ a(\mathbf{A} + \mathbf{M}) &= a\mathbf{A} + a\mathbf{M} \end{aligned} \right\} (\text{分配律})$$

4. 四元数和四元数相乘

四元数的三个虚数单位的乘法规定如下：

$$\left. \begin{aligned} i \cdot i &= j \cdot j = k \cdot k = -1 \\ i \cdot j &= -j \cdot i = k \\ j \cdot k &= -k \cdot j = i \\ k \cdot i &= -i \cdot k = j \end{aligned} \right\} \quad (B-1)$$

为了帮助记忆, 虚数单位相乘可表示成图 B—1, 按箭头方向顺序的两个虚数相乘, 则得到正的第三个虚数单位。反向时为负号。

按上述规则, 可进行四元数相乘, 两个四元数相乘的积, 可以有三种不同的表示方法, 根据运算的需要, 可选用其中任一种。

(A) 乘积的矢量形式

设有两个四元数

$$\mathbf{A} = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$$

$$\mathbf{M} = m_0 + m_1 i + m_2 j + m_3 k = m_0 + \mathbf{m}$$



图B—1 四元数虚数单位乘法

则

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{M} = (\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k) \circ (m_0 + m_1 i + m_2 j + m_3 k)$$

$$= \lambda_0 m_0 - \lambda_1 m_1 - \lambda_2 m_2 - \lambda_3 m_3 + \lambda_0 (m_1 i + m_2 j + m_3 k)$$

$$+ m_0 (\lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} \quad (\text{B—2})$$

把(B—2)式写成矢量形式:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{M} = \lambda_0 m_0 + \lambda_0 \mathbf{m} + m_0 \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{m} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{m} \quad (\text{B—3})$$

(B) 乘积的四元数形式

把(B—2)式展开整理也可以写成:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{M} &= \lambda_0 m_0 - \lambda_1 m_1 - \lambda_2 m_2 - \lambda_3 m_3 + (\lambda_0 m_1 + \lambda_1 m_0 + \lambda_2 m_3 - \lambda_3 m_2) i \\ &\quad + (\lambda_0 m_2 + \lambda_2 m_0 + \lambda_3 m_1 - \lambda_1 m_3) j + (\lambda_0 m_3 + \lambda_3 m_0 + \\ &\quad \lambda_1 m_2 - \lambda_2 m_1) k \\ &= n_0 + n_1 i + n_2 j + n_3 k \end{aligned} \quad (\text{B—4})$$

式中

$$\left. \begin{aligned} n_0 &= \lambda_0 m_0 - \lambda_1 m_1 - \lambda_2 m_2 - \lambda_3 m_3 \\ n_1 &= \lambda_0 m_1 + \lambda_1 m_0 + \lambda_2 m_3 - \lambda_3 m_2 \\ n_2 &= \lambda_0 m_2 + \lambda_2 m_0 + \lambda_3 m_1 - \lambda_1 m_3 \\ n_3 &= \lambda_0 m_3 + \lambda_3 m_0 + \lambda_1 m_2 - \lambda_2 m_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B—5})$$

(B—4)即为两个四元数乘积的四元数形式。

(C) 乘积的矩阵形式

如果我们把四元数 N 、 A 、 M 的四个元数写成列矢量的形式, 即表示:

$$\mathbf{Q}(n) = [n_0 \quad n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T$$

$$\mathbf{Q}(\lambda) = [\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3]^T$$

$$\mathbf{Q}(m) = [m_0 \quad m_1 \quad m_2 \quad m_3]^T$$

则(B—5)式可以写成如下的矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

或

$$\mathbf{Q}(n) = \mathbf{M}(\lambda)\mathbf{Q}(m) \quad (\text{B-6})$$

(B-5)式也可以写成另一种形式:

$$\begin{pmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 & -m_1 & -m_2 & -m_3 \\ m_1 & m_0 & m_3 & -m_2 \\ m_2 & -m_3 & m_0 & m_1 \\ m_3 & m_2 & -m_1 & m_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

或

$$\mathbf{Q}(n) = \mathbf{M}^*(m)\mathbf{Q}(\lambda) \quad (\text{B-7})$$

(B-6)和(B-7)中的 4×4 阶矩阵中,去掉第一行和第一列,剩下的 3×3 阶阵,称作该矩阵的“核”。比较(B-6)和(B-7)可见, $\mathbf{M}(\lambda)$ 和 $\mathbf{M}^*(m)$ 除元素不同外,其核互为转置。

这种四元数乘积的矩阵形式,也可以推广到三个以上的四元数乘积。如:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\Lambda \cdot M \cdot P) &= \mathbf{M}(\lambda)\mathbf{Q}(M \cdot P) = \mathbf{M}(\lambda)\mathbf{M}^*(P)\mathbf{Q}(m) \\ &= \mathbf{M}^*(P)\mathbf{Q}(\Lambda \cdot M) = \mathbf{M}^*(P)\mathbf{M}(\lambda)\mathbf{Q}(m) \end{aligned}$$

由此可得

$$\mathbf{M}^*(P)\mathbf{M}(\lambda) = \mathbf{M}(\lambda)\mathbf{M}^*(P) \quad (\text{B-8})$$

(B-8)式说明, \mathbf{M}^* 和 \mathbf{M} 的相乘具有可交换性。而一般的矩阵相乘,则是不可交换的。

另外

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\Lambda \cdot M \cdot P) &= \mathbf{M}(\lambda)\mathbf{Q}(M \cdot P) = \mathbf{M}(\lambda)\mathbf{M}(m)\mathbf{Q}(P) \\ &= \mathbf{M}(\Lambda \cdot M)\mathbf{Q}(P) \\ &= \mathbf{M}^*(P)\mathbf{Q}(\Lambda \cdot M) = \mathbf{M}^*(P)\mathbf{M}^*(m)\mathbf{Q}(\lambda) \\ &= \mathbf{M}^*(M \cdot P)\mathbf{Q}(\lambda) \end{aligned}$$

故

$$\mathbf{M}(\Lambda \cdot M) = \mathbf{M}(\lambda)\mathbf{M}(m) \quad (\text{B-9})$$

$$\mathbf{M}^*(M \cdot P) = \mathbf{M}^*(P)\mathbf{M}^*(m) \quad (\text{B-10})$$

(B-9)式说明, $\Lambda \cdot M$ 的 \mathbf{M} 阵等于 Λ 的 \mathbf{M} 阵乘以 m 的 M 的阵。是顺序相乘,而(B-10)说明 $M \cdot P$ 的 \mathbf{M}^* 阵是 P 的 \mathbf{M}^* 阵乘 m 的 \mathbf{M}^* 阵,是逆序相乘,类似一般正交阵的乘积转置或一般方阵乘积的求逆。熟练的运用这些性质,则在四元数运算中带来很多方便。

从(B-2)式可以看出,四元数相乘是不可交换的。即

$$\Lambda \cdot M \neq M \cdot \Lambda$$

但四元数相乘符合乘法的结合律和分配律即

$$(\Lambda \cdot M) \cdot P = \Lambda \cdot (M \cdot P) \quad (\text{结合律})$$

$$\Lambda \cdot (M + P) = \Lambda \cdot M + \Lambda \cdot P \quad (\text{分配律})$$

5. 四元数的共轭

如果一个四元数为

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda$$

则定义其共轭四元数为

$$\Lambda^* = \lambda_0 - \lambda \quad (B-11)$$

推理1 四元数之和的共轭等于四元数共轭之和。

$$(\Lambda + M)^* = \Lambda^* + M^*$$

推理2 两个四元数之积的共轭四元数，等于两个四元数共轭之积取相反的顺序，即：

$$(\Lambda \cdot M)^* = M^* \cdot \Lambda^*$$

6. 四元数的范数

四元数的范数定义为：

$$\|\Lambda\| \triangleq \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (B-12)$$

$$= \Lambda \cdot \Lambda^* = \Lambda^* \cdot \Lambda$$

$\|\Lambda\| = 1$ 的四元数叫作规范化的四元数。

四元数之积的范数，等于四元数范数之积，即

$$\|\Lambda \cdot M\| = \|\Lambda\| \cdot \|M\| = \|M\| \cdot \|\Lambda\|$$

7. 四元数的逆

四元数的逆定义为

$$\Lambda^{-1} = \frac{\Lambda^*}{\|\Lambda\|} \quad (B-13)$$

则

$$\Lambda^{-1} \cdot \Lambda = \Lambda \cdot \Lambda^{-1} = 1$$

如果 $\|\Lambda\| = 1$ ，即对规范化的四元数

$$\Lambda^{-1} = \Lambda^*$$

即

$$\Lambda \cdot \Lambda^* = \Lambda^* \cdot \Lambda = 1 \quad (B-14)$$

二、四元数在刚体定位中的应用

用四元数来研究刚体定点转动时，四元数的矢量部份可以看作是三维空间中的一个矢量。

$$\begin{aligned} \Lambda &= \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \\ &= \lambda_0 + \lambda \end{aligned}$$

如果我们把 i, j, k 看作是参考坐标系轴向的单位矢量，则 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 就是矢量 λ 在参考坐标系轴向的分量。同样的情况， λ 可以写成任何其他动坐标系轴向的分量形式，如

$$\begin{aligned} \Lambda &= \lambda_0 + \lambda_{b1} i_b + \lambda_{b2} j_b + \lambda_{b3} k_b \\ &= \lambda_0 + \lambda_{b1}' i_b' + \lambda_{b2}' j_b' + \lambda_{b3}' k_b \end{aligned}$$

如果用 λ 在任一动坐标系上的分量构成下列四元数，即

$$\Lambda_b = \lambda_0 + \lambda_{b1} i + \lambda_{b2} j + \lambda_{b3} k$$

则称 Λ_b 为四元数 Λ 在坐标系 b 中的“映像”。

对三维空间中的一个矢量 r ，我们可以写成任何坐标系中的分量形式，这些分量形式都可以看成是标量为零的四元数。如

$$\begin{aligned} r &= x_b i_b + y_b j_b + z_b k_b \\ &= x_n i_n + y_n j_n + z_n k_n \end{aligned}$$

可以看成是标量为零的四元数，即

$$\begin{aligned} r &= r_0 + r \\ &= 0 + x_b i_b + y_b j_b + z_b k_b \\ &= 0 + x_n i_n + y_n j_n + z_n k_n \end{aligned}$$

如果把上式中的 $i_b, j_b, k_b, i_n, j_n, k_n$ 改写为 i, j, k ，则有：

$$\begin{aligned} r_b &= x_b i + y_b j + z_b k \\ r_n &= x_n i + y_n j + z_n k \end{aligned}$$

式中 r_b 叫作矢量 r 在 b 坐标系上的四元数“映像”， r_n 叫作矢量 r 在 n 坐标系上的四元数“映像”。

上述定义可以认为是用四元数来研究刚体定点转动问题的一些“约定”。特别要注意的是 $i_b, j_b, k_b, i_n, j_n, k_n$ 等尽管可以看作是 b 坐标系和 n 坐标系轴向上的单位矢量，但是在作为四元数进行运算时，必须按四元数的运算规则进行。

定理1 矢量 r 绕轴 oo' 转动 θ 角变为矢量 r' ，用 u 表示转轴向上的单位矢量，则

$$r' = Q \cdot r \cdot Q^* \quad (B-15)$$

式中

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + u \sin \frac{\theta}{2}$$

定理2 矢量依次进行由 Q_1, Q_2 确定的两次转动，则合成转动等效于由 $N = Q_2 \cdot Q_1$ 确定的一次转动。

证 设 r 经由 Q_1 确定的第一次转动变为 r' ，则

$$r' = Q_1 \cdot r \cdot Q_1^*$$

r' 再经由 Q_2 确定的第二次转动变为 r'' ，则

$$r'' = Q_2 \cdot r' \cdot Q_2^*$$

把第一式代入第二式得

$$\begin{aligned} r'' &= Q_2 \cdot Q_1 \cdot r \cdot Q_1^* \cdot Q_2^* \\ &= Q_2 \cdot Q_1 \cdot r \cdot (Q_1 \cdot Q_2)^* \\ &= N \cdot r \cdot N^* \end{aligned}$$

即 $N = Q_2 \cdot Q_1 \quad (B-16)$

显然，定理2可以推广到二次以上的转动。如果一个动坐标系相对参考坐标系绕某一个固定轴转动 θ 角，等效转轴向上的单位矢量为 u ，则两个坐标系之间的变换矩阵为

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + u \sin \frac{\theta}{2}$$

则坐标系轴向上的单位矢量，符合矢量旋转的规则，即

$$\left. \begin{aligned} i_b &= Q \circ i \circ Q^* \\ j_b &= Q \circ j \circ Q^* \\ k_b &= Q \circ k \circ Q^* \end{aligned} \right\} \quad (B-17)$$

定理3 如果坐标系 b 经由 Q 确定的转动变为 b' , 而 Q 在 b 和 b' 中的分量形式为

$$\begin{aligned} Q &= q_{0b} + q_{1b}i_b + q_{2b}j_b + q_{3b}k_b \\ &= q_{0b'} + q_{1b'}i_{b'} + q_{2b'}j_{b'} + q_{3b'}k_{b'} \\ \text{则} \quad q_{ib} &= q_{ib'} \quad i=0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (B-18)$$

证 由 (B-17) 式:

$$\begin{aligned} Q &= q_{0b'} + q_{1b'}i_{b'} + q_{2b'}j_{b'} + q_{3b'}k_{b'} \\ &= q_{0b'} + q_{1b'}Q \circ i_b \circ Q^* + q_{2b'}Q \circ j_b \circ Q^* + q_{3b'}Q \circ k_b \circ Q^* \\ &= Q \circ (q_{0b'} + q_{1b'}i_b + q_{2b'}j_b + q_{3b'}k_b) \circ Q^* \end{aligned}$$

显然, 如果

$$\begin{aligned} q_{ib} &= q_{ib'} \\ \text{即} \quad q_{0b'} + q_{1b'}i_b + q_{2b'}j_b + q_{3b'}k_b \\ &= q_{0b} + q_{1b}i_b + q_{2b}j_b + q_{3b}k_b = Q \\ \text{故} \quad Q &= Q \circ Q \circ Q^* = Q \end{aligned}$$

即 (B-18) 式成立。

定义 如果坐标系 b 经由 Q 确定的转动变为坐标系 b' , 则 Q 在 b 和 b' 上的“映像”叫作变换的特征四元数, 我们用 Q° 表示。即

$$\begin{aligned} Q^\circ &= q_{0b} + q_{1b}i + q_{2b}j + q_{3b}k \\ &= q_{0b'} + q_{1b'}i + q_{2b'}j + q_{3b'}k \end{aligned} \quad (B-19)$$

定理4 如果坐标系 b 经转动变成 b' 的特征四元数为 Q_1° , b' 经转动变成 b'' 的特征四元数为 Q_2° , 则变 b 为 b'' 的等效转动特征四元数为

$$N^* = Q_1^\circ \circ Q_2^\circ \quad (B-20)$$

证 由定理 2, 两次转动的合成为

$$N = N^* = Q_2 \circ Q_1$$

$$\begin{aligned} Q_2 \circ Q_1 &= (q_{0b'} + q_{1b'}i_{b'} + q_{2b'}j_{b'} + q_{3b'}k_{b'}) \circ (q_{0b} + q_{1b}i_b + q_{2b}j_b + q_{3b}k_b) \\ &= Q_1 \circ (q_{0b'} + q_{1b'}i_b + q_{2b'}j_b + q_{3b'}k_b) \circ Q_1^* \circ Q_1 \end{aligned}$$

如取 b 作参考, 则

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_1^\circ \\ Q_2^\circ &= q_{0b'} + q_{1b'}i_b + q_{2b'}j_b + q_{3b'}k_b \end{aligned}$$

考虑到 $Q_1^* \circ Q_1 = 1$

故 $Q_2 \circ Q_1 = Q_1^\circ \circ Q_2^\circ$

可见, 转动合成时, 如果是原始四元数则四元数相乘的顺序和转动的顺序相反, 如果是特征四元数, 则四元数相乘的顺序和转动的顺序相同。

例 用航向角和姿态角表示的机体坐标系 b 和地理坐标系 n 之间的变换(参看图3-2)。对应于第一次转动 ψ 的四元数为

$$Q_1 = \cos \frac{\psi}{2} + k_n \sin \frac{\psi}{2}$$

由于转动向的单位矢量为 k_n , 显然 Q_1 即为转动的特征四元数 Q_1^c .
对应于第二次转动 θ 的四元数为:

$$Q_2 = \cos \frac{\theta}{2} + j' \sin \frac{\theta}{2}$$

j' 在动坐标系 $ox'y'z'$ 中的分量为 $[0 \ 1 \ 0]^T$, 故 j' 的“映像”为:

$$j' = oi_n + j_n + ok_n = j_n$$

即:

$$Q_2^c = \cos \frac{\theta}{2} + j_n \sin \frac{\theta}{2}$$

对应于第三次转动 γ 的四元数为:

$$Q_3 = \cos \frac{\gamma}{2} + i_b \sin \frac{\gamma}{2}$$

i_b 在 b 坐标系中的分量为 $[1, 0, 0]^T$, 故 i_b 的“映像”为:

$$i_b = i_n + oj_n + ok_n = i_n$$

即相应的特征四元数为:

$$Q_3^c = \cos \frac{\gamma}{2} + i_n \sin \frac{\gamma}{2}$$

故 b 和 n 之间的变换特征四元数为:

$$Q^c = Q_1^c \cdot Q_2^c \cdot Q_3^c$$

(B-21)

附录三

地球形状和重力场

一、地球形状

以海平面作为基准，延伸到全部陆地所形成的表面称作“大地水准面”。大地水准面所包围的几何体称作“地球体”。地球体的表面是地球重力场的一个等位面，也就是地球体的法线方向和重力方向一致。地球的重力是万有引力和地球自转的离心力合成的。由于地球质量的分布不均匀和太阳、月亮等天体的运动影响等原因，使地球重力场的大小和方向实际上是不规则的，因此地球体的形状，实际上也是一个不规则的几何体，在工程技术的应用中，必须采取某种近似的形状。

把地球体看作是半径为 R 的球体，这是一般工程技术中所采用的。进一步的精确近似，把地球体看成是一个旋转椭球体，长半轴在赤道平面内，短半轴和自转重合（见图 C—1）。参考椭球体的曲面方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{R_e^2} + \frac{z^2}{R_p^2} = 1 \quad (C-1)$$

$e = \frac{R_e - R_p}{R_e}$ 椭圆度或称扁率。

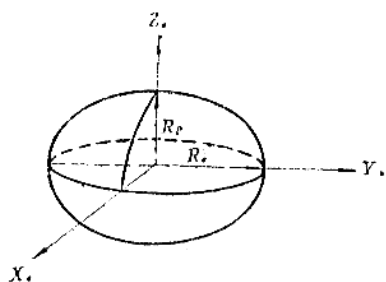
二、地心位置矢量和垂线偏差

飞行器的地心位置矢量（见图 C—2）为

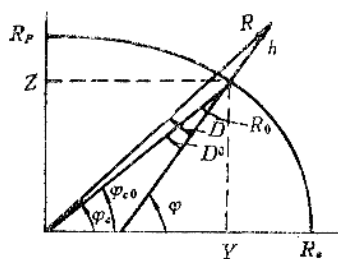
$$\bar{R} = \bar{R}_0 + \bar{h} \quad (C-2)$$

R_0 ——参考椭球向径

h ——飞行高度。



图C—1 参考椭球



图C—2 地心位置向量

按照余弦定理有

$$R^2 = R_0^2 + 2R_0h \cos D_0 + h^2$$

式中 D_0 ——地面点的垂线偏差。

上式可改写为

$$R = [(R_0 + h)^2 - 2hR_0(1 - \cos D_0)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (R_0 + h) \left[1 - \frac{2hR_0(1 - \cos D_0)}{(R_0 + h)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

取 $1 - \cos D_0 \approx D_0^2/2$,
则

$$R = R_0 + h - \frac{hR_0D_0^2}{2(R_0 + h)} - \frac{h^2R_0^2D_0^4}{8(R_0 + h)^3}$$

在纬度 $\varphi = 45$ 度, $D_0 \approx \frac{1}{297}$ 弧, 故上式中后两项完全可以略去, 地心位置矢量可以表示为

$$R = R_0 + h \quad (C-3)$$

我们定义垂线偏差为

$$\underline{\Delta} = \varphi - \varphi_c$$

由 p 点的法线方程

$$\frac{z - z_p}{F'(z)} = \frac{y - y_p}{F'(y)} \quad (C-4)$$

$$F(y, z) = \frac{z^2}{R_p^2} + \frac{y^2}{R_e^2} - 1 = 0$$

故

$$F'(z) = \frac{2z}{R_p^2} = \frac{2z_p}{R_p^2}$$

$$F'(y) = \frac{2y}{R_e^2} = \frac{2y_p}{R_e^2}$$

代入 (C-4) 得法线方程为

$$\frac{R_p^2}{z_p}(z - z_p) = \frac{R_e^2}{y_p}(y - y_p)$$

求法线和 $z=0$ (即 y 轴) 的交点, 得:

$$-R_p^2 = \frac{R_e^2}{y_p}y - R_e^2$$

即

$$y = \frac{R_e^2 - R_p^2}{R_e^2} y_p$$

表示

$$k^2 = \frac{R_e^2 - R_p^2}{R_e^2} \text{ 椭球的离心率}$$

则

$$y = \overline{OM} = k^2 y_p$$

在三角形 OMR 中, 利用正弦定理有

$$\frac{\sin D}{\mu^2 y_p} = \frac{\sin(\pi - \varphi)}{R} \quad (C-5)$$

考虑到

$$R \approx R_0 + h$$

$$\begin{aligned}
 y_p &= R_0 \cos \varphi_e \\
 &= R_0 \cos (\varphi - D_0) \\
 &= R_0 (\cos \varphi \cos D_0 + \sin \varphi \sin D_0) \\
 k^2 &= 1 - \left(\frac{R_p}{R_e} \right)^2 = 2e \left(1 - \frac{e}{2} \right)
 \end{aligned}$$

代入 (C-5) 式并稍作整理得

$$\sin D = \frac{e \left(1 - \frac{e}{2} \right) R_0}{R_0 + h} \sin 2\varphi \cos D_0 + \frac{2e \left(1 - \frac{e}{2} \right) R_0}{R_0 + h} \sin^2 \varphi \sin D_0$$

由

$$\sin D_0 \approx D_0, \quad \cos D_0 \approx 1$$

得

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{e R_0}{R_0 + h} \sin 2\varphi - \frac{\frac{1}{2} e^2 R_0}{R_0 + h} \sin 2\varphi + \frac{2e R_0 D_0}{R_0 + h} \sin^2 \varphi \\
 &\quad - \frac{e^2 R_0 D_0}{R_0 + h} \sin^2 \varphi \\
 &= \frac{e R_0}{R_0 + h} \sin 2\varphi + \varepsilon_e \\
 &\approx e \left(1 - \frac{h}{R_0} \right) \sin 2\varphi \quad (C-6) \\
 \varepsilon_e &\leq 1.6''
 \end{aligned}$$

考虑 $h=0$ 时得

$$D_0 = e \sin 2\varphi \quad (C-7)$$

三、地球的向径和曲率半径

1. 地球向径 R_0

由椭圆方程

$$\frac{z^2}{R_p^2} + \frac{y^2}{R_e^2} = 1$$

得

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{R_p^2}{R_e^2} \frac{y}{z} = - \operatorname{ctg} \varphi$$

由

$$\frac{R_p^2}{R_e^2} = 1 - k^2$$

代入上式得

$$z = (1 - \mu^2) y \operatorname{tg} \varphi \quad (C-8)$$

代入椭圆方程得

$$\frac{(1 - k^2) y^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{R_p^2} + \frac{y^2}{R_e^2} = 1$$

稍作整理得

$$y = \frac{R_e \cos \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad (C-9)$$

将(C-9)代入(C-8)中得

$$z = \frac{R_e(1-k^2) \sin \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \quad (C-10)$$

$$\begin{aligned} R_0 &= (y^2 + z^2)^{1/2} \\ &= \frac{R_e(1-2k^2 \sin^2 \varphi + k^4 \sin^4 \varphi)^{1/2}}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \end{aligned}$$

把 $k^2 = 2e - e^2$ 代入上式, 略掉 e 的二阶以上的项, 并把分母写成 $(1-2e \sin^2 \varphi)^{-1/2}$, 展成级数取前两项, 分子也展成级数取前两项, 则得:

$$R_0 \approx R_e(1 - e \sin^2 \varphi) \quad (C-11)$$

2. 子午面内的曲率半径

由平面方程: $z = f(y)$

则曲率半径为

$$R = \left[1 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right]^{3/2} / \frac{d^2z}{dy^2} \quad (C-12)$$

由 $\frac{dz}{dy} = -\operatorname{ctg} \varphi \quad (C-13)$

有 $\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dy} \quad (C-14)$

按(C-9)式

$$y = \frac{R_e \cos \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$$

有 $\frac{dy}{d\varphi} = -R_e(1-k^2) \sin \varphi / (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}$

代入(C-14), 并把(C-13)(C-14)代入(C-12), 经过整理, 得地球子午面内的曲率半径为

$$R_N = \frac{R_e(1-k^2)}{(1-k^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}} \quad (C-15)$$

把 $k^2 = 2e - e^2$ 代入, 并略掉 e^2 项得

$$R_N = \frac{R_e(1-2e)}{(1-2e \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (C-16)$$

取 $(1-2e \sin^2 \varphi)^{-3/2} \approx 1 + 3e \sin^2 \varphi$

则 $R_N \approx R_e(1 - 2e + 3e \sin^2 \varphi) \quad (C-17)$

3. 垂直子午面的法线平面内的曲率半径

根据梅尼定理

$$R_E \cos \varphi = y$$

故 $R_E = \frac{R_e}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \quad (C-18)$

将 $k^2 = 2e - e^2$ 代入, 并略掉 e^2 项

取 $(1-2e \sin^2 \varphi)^{-1/2} \approx 1 + e \sin^2 \varphi$

则 $R_E \approx R_e(1 + e^2 \sin^2 \varphi) \quad (C-19)$

四、地球重力场

地球的重力是地球的引力和地球自转的离心力的矢量和，即

$$\mathbf{g} = \mathbf{G} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{R}) \quad (C-20)$$

式中 \mathbf{G} ——地球引力

地球引力 \mathbf{G} 是地球引力场位函数的梯度，即

$$\mathbf{G} = \nabla U \quad (C-21)$$

式中 ∇ ——运算符

U ——引力位

1. 引力位

飞行器所处位置，可用地心位置矢量 \mathbf{R} 表示，如用 $D(\rho, \beta, \theta)$ 表示地球质量密度，则地球内的一个微质量可表示为

$$dm = D(\rho, \beta, \theta) \rho^2 \sin \beta d\rho d\beta d\theta \quad (\text{见图 C-3})$$

则此微质量在飞行器所处位置点的引力位为

$$dU(R, \phi, \lambda) = N \frac{dm}{|\mathbf{R} - \mathbf{P}|}$$

对上式进行体积分，则可得地球在飞行器所处位置点的引力位为

$$U(R, \phi, \lambda) = N \iiint \frac{dm}{|\mathbf{R} - \mathbf{P}|} \quad (C-22)$$

式中 N ——万有引力常数

$\mathbf{R} - \mathbf{P}$ 是微质量点和飞行器所处位置点之间的距离，由图 (C-3) 可以看出，根据余弦定理有：

$$|\mathbf{R} - \mathbf{P}| = (R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}$$

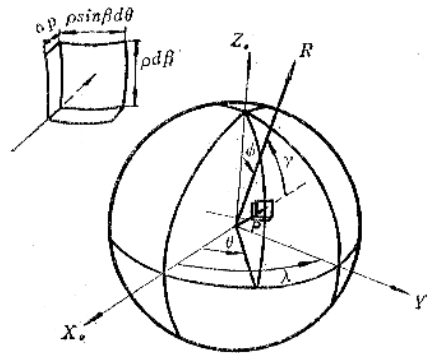
$$\begin{aligned} |\mathbf{R} - \mathbf{P}|^{-1} &= R^{-1} \left(1 + \frac{\rho^2}{R^2} - 2 \frac{\rho}{R} \cos \gamma \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= R^{-1} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho^2}{R^2} - 2 \frac{\rho}{R} \cos \gamma \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{\rho^2}{R^2} - 2 \frac{\rho}{R} \cos \gamma \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{16} \left(\frac{\rho^2}{R^2} - 2 \frac{\rho}{R} \cos \gamma \right)^3 + \dots \right] \\ &= R^{-1} \left[1 + \frac{\rho}{R} \cos \gamma + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{R^2} (3 \cos^2 \gamma - 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\rho^3}{R^3} \cos \gamma (5 \cos^3 \gamma - 3) + \dots \right] \end{aligned}$$

在上式中令

$$P_0(\cos \gamma) = 1$$

$$P_1(\cos \gamma) = \cos \gamma$$

$$P_2(\cos \gamma) = \frac{3}{2} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2}$$



图C-3 地球引力位

$$P_3(\cos \gamma) = \frac{5}{2} \cos^3 \gamma - \frac{3}{2} \cos \gamma$$

.....

$$P_k(\cos \gamma) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k(\cos^2 \gamma - 1)^k}{d(\cos \gamma)^k} \quad (C-23)$$

$P_k(\cos \gamma)$ 称作勒让德多项式。则

$$|\mathbf{R} - \mathbf{P}|^{-1} = R^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos \gamma) \left(\frac{\rho}{R}\right)^k$$

将上式代入 (C-22) 式则得位函数

$$U(R, \phi, \lambda) = \frac{N}{R} \iiint \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos \gamma) \left(\frac{\rho}{R}\right)^k dm \quad (C-24)$$

在球面三角形 MPN 中, 利用边的余弦定理有 (见图 C-4)

$$\cos \gamma = \cos \beta \cos \phi + \sin \beta \sin \phi \cos(\lambda - \theta)$$

把上式展开得:

$$\cos \gamma = \cos \beta \cos \phi + \sin \beta \sin \phi (\cos \lambda \cos \theta + \sin \lambda \sin \theta)$$

代入 (C-24) 中, 并表示:

$$A_k = N \iiint \rho^k \rho_k(\cos \beta) dm$$

则 (C-24) 变为

$$U(R, \phi, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{R^{k+1}} P_k(\cos \phi) + \theta \text{ 的周期函数。}$$

考虑参考椭球是旋转椭球, 相对地球极轴质量分布是完全对称的, 故 $D(\rho, \beta, \theta) = P(\rho, \beta)$, 故上式中的 θ 周期函数可以不考虑即

$$U(R, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{R^{k+1}} P_k(\cos \phi)$$

展开得

$$U(R, \phi) = \frac{N}{R} \iiint dm + \frac{N}{R^2} \cos \phi \iiint \rho \cos \beta dm + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{R^{k+1}} P_k(\cos \phi)$$

式中第二项中 $\rho \cos \beta$ 是 dm 到赤道平面的距离, 由于旋转椭球体相对赤道平面的对称性,

故
$$\iiint \rho \cos \beta dm = 0$$

则
$$U(R, \phi) = \frac{\mu}{R} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{R^{k+1}} P_k(\cos \phi)$$

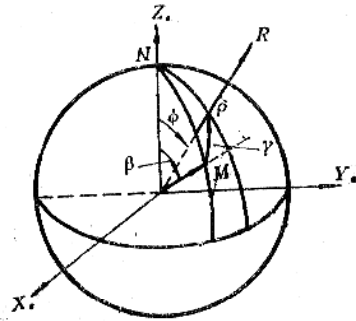
式中 $\mu = Nm$ 质量和万有引力常数积。

把上式中的分子分母同乘以 R^k 则

$$\frac{R^k}{R^k R^{k+1}} = \left(\frac{R_e}{R}\right)^k \frac{1}{R^k R}$$

故

$$U(R, \phi) = \frac{\mu}{R} \left[1 - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{R_e}{R}\right)^k J_k P_k(\cos \phi) \right] \quad (C-25)$$



图C-4 球面三角

式中 $J_4 = -\frac{A_4}{R_0^4 \mu}$

展开得

$$U(R, \phi) = \mu \left[\frac{1}{R} - \frac{J_2}{2} \frac{R_0^2}{R^3} (3 \cos^2 \phi - 1) - \frac{J_3}{2} \frac{R_0^3}{R^4} (5 \cos^2 \phi - 3 \cos \phi) - \frac{J_4}{8} \frac{R_0^4}{R^5} (35 \cos^4 \phi - 30 \cos^2 \phi + 3) \dots \right] \quad (C-26)$$

2. 在球面坐标系内表示的引力场

由 $\mathbf{G} = \nabla U$

在球面坐标系中

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial R} i_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} i_\phi$$

式中 i_R, i_ϕ 是沿径向和余纬方向的单位矢量。

把 G 用沿 i_R 和 i_ϕ 方向的分量表示, 则

$$G = G_R i_R + G_\phi i_\phi \quad (C-27)$$

$$G_R = \frac{\partial U}{\partial R} \quad G_\phi = \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \phi}$$

利用 (C-26) 式, 按上式计算, 可得

$$G_R = -\frac{\mu}{R^2} \left[1 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 (3 \cos^2 \phi - 1) - 2 J_3 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \cos \phi (5 \cos^2 \phi - 3) - \frac{5}{8} J_4 \left(\frac{R_0}{R} \right)^4 (35 \cos^4 \phi - 30 \cos^2 \phi + 3) \right] \quad (C-28)$$

$$G_\phi = 3 \frac{\mu}{R^3} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \sin \phi \cos \phi \times \left[J_2 + \frac{1}{2} J_3 \left(\frac{R_0}{R} \right) \sec \phi (5 \cos^2 \phi - 1) + \frac{5}{6} J_4 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 (7 \cos^2 \phi - 3) \right] \quad (C-29)$$

如果把 G 表示在地心地理坐标系内则

$$\mathbf{G}^e = [-G_\phi, 0, -G_R]^T \quad (C-30)$$

3. 在地心惯性坐标系内表示的引力场

地心地理坐标系和地心惯性坐标系之间的变换矩阵为

$$\mathbf{C}_i^e = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_c \cos(\lambda + \omega_{ie} t) & -\sin \varphi_c \sin(\lambda + \omega_{ie} t) & \cos \varphi_c \\ -\sin(\lambda + \omega_{ie} t) & \cos(\lambda + \omega_{ie} t) & 0 \\ -\cos \varphi_c \cos(\lambda + \omega_{ie} t) & -\cos \varphi_c \sin(\lambda + \omega_{ie} t) & -\sin \varphi_c \end{bmatrix} \quad (C-31)$$

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{C}_i^e \mathbf{G}^e \quad (C-32)$$

把 (C-30) 和 (C-31) 代入 (C-32) 则得:

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} (G_r + G_\phi \operatorname{tg} \varphi_c) \frac{r_x}{R} \\ (G_r + G_r \operatorname{tg} \varphi_c) \frac{r_r}{R} \\ (G_r + G_\phi \operatorname{cot} \varphi_c) \frac{r_z}{R} \end{bmatrix} \quad (C-33)$$

式中

$$\begin{aligned} \frac{r^i}{R} &= \left[\frac{r_x}{R}, \frac{r_y}{R}, \frac{r_z}{R} \right]^T \\ &= [\cos \varphi_c \cos(\lambda + \omega_{ie} t), \cos \varphi_c \sin(\lambda + \omega_{ie} t), \sin \varphi_c]^T \end{aligned}$$

把 (C-28)、(C-29) 代入 (C-33), 并稍作整理得

$$\left. \begin{aligned} G_x &= -\frac{\mu}{R^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \left[1 - 5 \left(\frac{r_z}{R} \right)^2 \right] \right\} \frac{r_x}{R} + \text{误差项 } \Delta G_x \\ G_y &= -\frac{\mu}{R^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \left[1 - 5 \left(\frac{r_z}{R} \right)^2 \right] \right\} \frac{r_y}{R} + \text{误差项 } \Delta G_y \\ G_z &= -\frac{\mu}{R^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \left[3 - 5 \left(\frac{r_z}{R} \right)^2 \right] \right\} \frac{r_z}{R} + \text{误差项 } \Delta G_z \end{aligned} \right\} \quad (\text{C-34})$$

式中的误差项, 在 $\varphi_c = 64^\circ$ 处, $\Delta G_x = \Delta G_y = 1.2 \times 10^{-5} G$, $\Delta G_z = 2.0 \times 10^{-5} G$, 在实际应用中可以略去不计。

4. 地球重力场

按照地球重力场的定义有:

$$\mathbf{g} \triangleq \mathbf{G} - \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \mathbf{R}) \quad (\text{C-20})$$

如果把 \mathbf{g} 表示在地理坐标系则可以写作

$$\mathbf{g}^n = [\xi g, -\eta g, g]^T \quad (\text{C-35})$$

式中 ξ ——垂线绕 E 轴的偏差

η ——垂线绕 N 轴的偏差 (见图 C-5)

$$g = g_e + \Delta g$$

g_e 为地理椭圆垂线方向的正常重力, Δg 为重力异常。

按 (C-20) 式, (C-35) 可写作

$$\mathbf{g}^n = \begin{bmatrix} \xi g \\ -\eta g \\ g_e + \Delta g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_N - R\omega_{ie}^2 \sin \varphi \cos \varphi_c \\ G_E \\ G_D - R\omega_{ie}^2 \cos \varphi \cos \varphi_c \end{bmatrix} \quad (\text{C-36})$$

G_D 可由下式表示

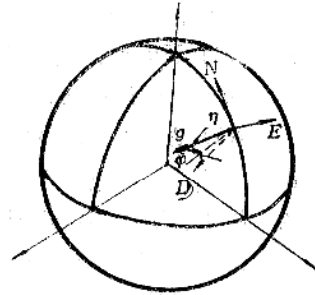
$$G_D = G_\delta \sin D - G_R \cos D$$

把 (C-28)、(C-29) 代入, 并利用 (C-7) 式则

$$\begin{aligned} G_D &\approx -G_r + G_\delta e \sin 2\varphi \\ &= \frac{\mu}{R^2} \left[1 - \frac{3}{4} J_2 (1 - 3 \cos 2\varphi) \right] + e \end{aligned}$$

式中 $e \approx 2 \times 10^{-5} g$, 通常可以略去, 则得

$$g_e \approx \frac{\mu^2}{R^2} \left[1 - \frac{3}{4} J_2 (1 - 3 \cos 2\varphi) \right] - R\omega_{ie}^2 \cos \varphi \cos \varphi_c \quad (\text{C-37})$$



图C-5 垂线偏差

参 考 文 献

- [1] 捷联式惯性导航原理 南京航空学院 1981年9月。
- [2] 捷联式惯性导航系统 西北工业大学 1981年6月。
- [3] Strap-down Inertial Systems AGARD-LS-95 1978年。
- [4] 四元数在刚体定位问题中的应用
B.H.勃拉涅茨 И.И.什梅格列夫斯基著 梁振和译 国防工业出版社 1977。
- [5] Inertial Navigation Systems Analysis Kenneth R. Britting 1971。
- [6] Peter, S. Maybeck "Wander azimuth implementation algorithm for a strapdown inertial system" AFFDL-TR-73-80 1973。
- [7] Wilcox, J.C. "A new algorithm for Strapdown inertial navigation" IEEE, Trans. Aero. and elect. 1967, NO.5。
- [8] James A. Haugen "Application of the avionics multi-processor to inertial navigation" AD-768354 1973。
- [9] 国外惯性技术手册 国防工业出版社 1983。
- [10] R.J. Nurse, J.T. Prohaska, D.G. Riegsecker "R-1136 A New baseline for the inertial navigation strapdown simulator program" AD-A062808 1978。
- [11] 加速度计 北京航空学院王壬林编 国防工业出版社 1982。
- [12] R.L. Pio "Symbolic representation of Coordinate transformation" IEEE Trans. on aer. and navi. elect. VOL ANE-11 1964。
- [13] 袁信 "捷联式惯导的基本算法" 南京航空学院科技资料 1978年10月。
- [14] 袁信 "捷联式惯导中的数学平台" 南京航空学院科技资料 1979年7月。
- [15] 吕炯兴 "四元数演算与刚体定位问题"。
- [16] John E. Bortz "A new concept in strapdown inertial navigation" NASA-TR R-329 1970。
- [17] "Investigation of application of twodegree-freedom dry tuned-gimbal gyroscopes to strapdown navigation systems" NASA CR-132419 1974。
- [18] "Theoretical and experimental investigation of computation errors in two different strapdown inertial navigation (In)-systems" N78-31080 1978。
- [19] "Analysis of strapdown navigation using quaternions" IEEE Trans. Aero. and elect. Vol. AES-14 No.5 1978。
- [20] 惯性导航系统原理 崔中兴编 国防工业出版社 1983。
- [21] 线性控制系统理论在惯性导航系统中的应用 关肇直主编 科学出版社 1984。
- [22] 吴 8
- [23] 荆 碎
- [24] K N V
- [25] F E
- [26] 4 4
- [27] 1 1
- [28] 1 1
- [29] 1 1
- [30] 1 1
- [31] 1 1
- [32] 1 1
- [33] 1 1
- [34] 1 1
- [35] 1 1
- [36] 1 1
- [37] 1 1
- [38] 1 1
- [39] 1 1
- [40] 1 1

- [22] 吴捷, 李树英, 钟汉枢 “卡尔曼滤波器的设计” 华南工学院学报
8卷2期 1980年。
- [23] 捷联式惯导系统译文集
南京航空学院 304 教研室 南航科技资料 1979年4月。
- [24] K.R.Britting “Self Alignment Techniques for Strapdown Inertial
Navigation Systems with Aircraft Application” Journal of Aircraft
Vol.7, No.4 1970.
- [25] P.C.Müller “Schnelligkeits Optimale Ausrichtung Von Tragheit
Plattformen” ortung und Navigation III 1971 p21-35.
- [26] A.Truckenbrodt, P.C.Müller” Consideration on Optimal Self-
Alignment of Gyro-stabilized Platforms” Symposium über
Kreiseltechnik, 1977.
- [27] U.Krogmann “Optimale Ausrichtung und Kalibrierung
Kreiselstabilisierten Plattformen” ortung und Navigation 2, 1971.
- [28] 须田信英 “自动控制中的矩阵理论” 1979年。
- [29] P.Faurre “最优惯性导航与统计滤波”
中国科学院数学研究所控制理论研究室译 1971年。
- [30] Fujii Hironori “Review of Strapdown Systems; Kinematics,
Alignment and State Estimation” N78-27099.
- [31] 郑潏 “卡尔曼滤波在捷联惯导系统初始对准中的应用” 西北工业大学学报
1983年10月第10卷2期。
- [32] 郑潏 “捷联惯导系统最佳初始对准的研究” 西北工业大学科技资料 KZH8309 期
1983年6月。
- [33] SIRU Utilization Vol.I, (NASA-CR-138574) N74-28098.
- [34] D.L.Kleinman “On an Iterative Technique for Riccati equation
Computation” IEEE Trans, Auto, Contr. Vol AC-13 1968.
- [35] J.C.Hung and B.J.Doran “High Reliability Strapdown Platforms
Using Two-Degree-of-Freedom Gyros” IEEE Tran. on, Aero, and
elect. systems AES-9 1973.
- [36] A.J.Pejsa “Optimum skewed redundant inertial navigation”
AIAA Paper No.73-850.
- [37] J.P.Gilmore and R.A.Mckern” A redundant strapdown inertial
reference unit(SIRU)” J.Spacecraft Vol.9 No. 1972.
- [38] C.R.Giardina “Optimal Gyro Mounting Configurations for
a Strapdown System” NAECON 74.
- [39] J.V.Harrison and E.G.Gai “Evaluating sensor orientation for
navigation performance and failure detection” IEEE Trans, Aero,
elect. syst. No.1977.
- [40] R.Ebner” Flight control/navigation inertial reference system”

NAECON 77.

- [41] P. Donoghue "System description and performance characteristics of a quad redundant strapdown inertial navigation and flight control system" NAECON 77.
- [42] A. P. 塞奇, J. L. 梅尔萨著 "估计理论及其在通讯与控制中的应用" 科学出版社 1971年。
- [43] 郑谔 "捷联余度惯性敏感元件的最佳配置" 西北工业大学科技资料总字第 985 期 1979年10月。
- [44] 郑谔 "捷联余度双自由度陀螺配置的评价" 西北工业大学科技资料。 KZH8004 期 1980年4月
- [45] G. T. Schmidt, et al, "Strapdown inertial systems" ADA055778.
- [46] 新宫博公 "惯性导航用冗余敏感器系统" 国外惯导与器件 1982年第3期。
- [47] 陈哲 "全姿态飞机捷联式系统姿态角的计算" 航空学报 Vol. 4. No. 3 1983年。